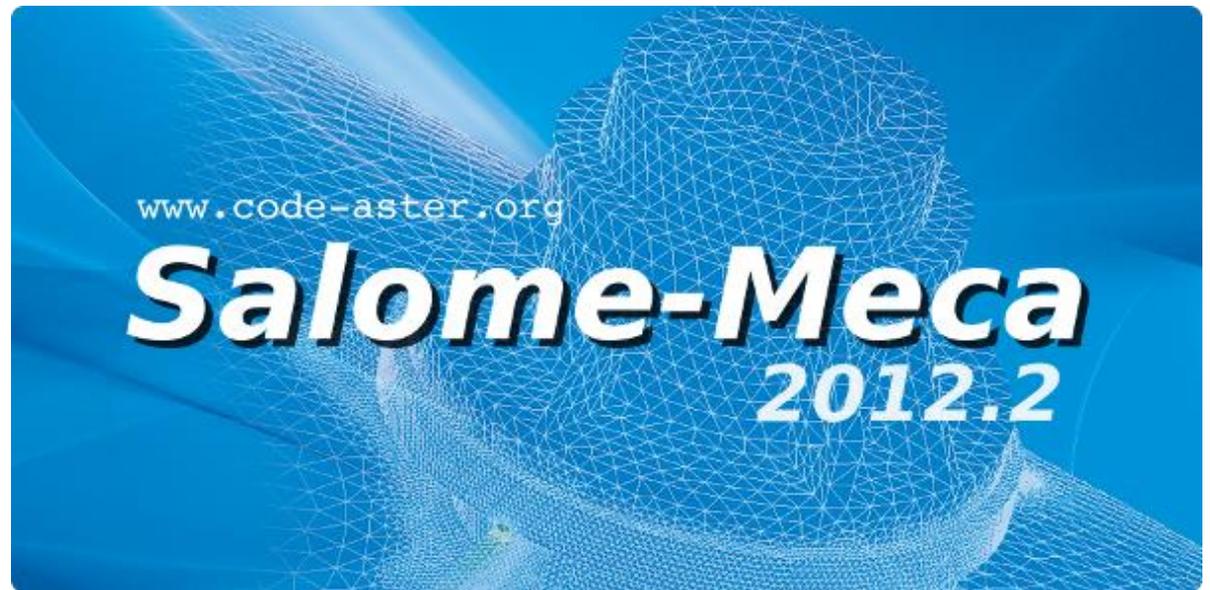


構成則の局所分解



Code_Aster, Salome-Meca course material

GNU FDL licence (<http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html>)

概要

▶ 一般的な概念

- 引張試験
- 熱力学の一般的な枠組み
- 弾性域の定義と一般法則
- 2つの例: 等方硬化と移動硬化

▶ *Code_Aster*の構成則

- ローカルポイント(ガウス点)で正確に計算されるもの
- 統合に関する数値的考慮
 - 等方硬化の解析的統合
 - 線形移動硬化の解析的統合
 - 一般的な統合
- 実用的な考慮事項
 - 構成則の定義
 - 材料パラメータの設定
 - 統合のパラメータ設定

▶ 高度な概念

- 線形検索
- 平面応力
- 準非圧縮性
- 微小変形 / 大変形

概要

▶ 一般的な概念

- 引張試験
- 熱力学の一般的な枠組み
- 弾性域の定義と一般法則
- 2つの例: 等方硬化と移動硬化

▶ Code_Asterの構成則

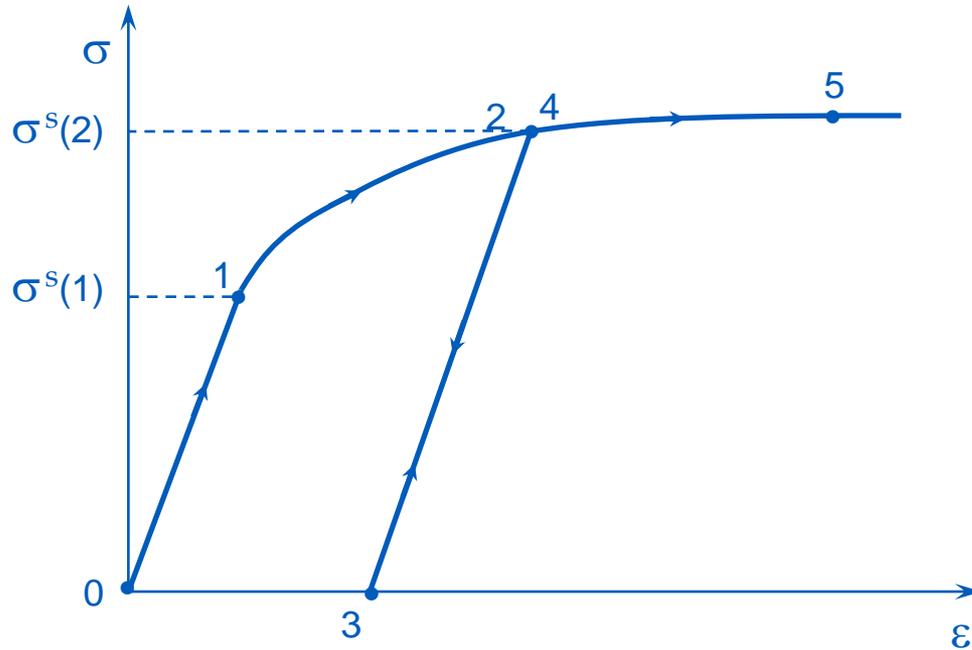
- ローカルポイント(ガウス点)で正確に計算されるもの
- 統合に関する数値的考慮
 - 等方硬化の解析的統合
 - 線形移動硬化の解析的統合
 - 一般的な統合
- 実用的な考慮事項
 - 構成則の定義
 - 材料パラメータの設定
 - 統合のパラメータ設定

▶ 高度な概念

- 線形検索
- 平面応力
- 準非圧縮性
- 微小変形 / 大変形

一般的な概念

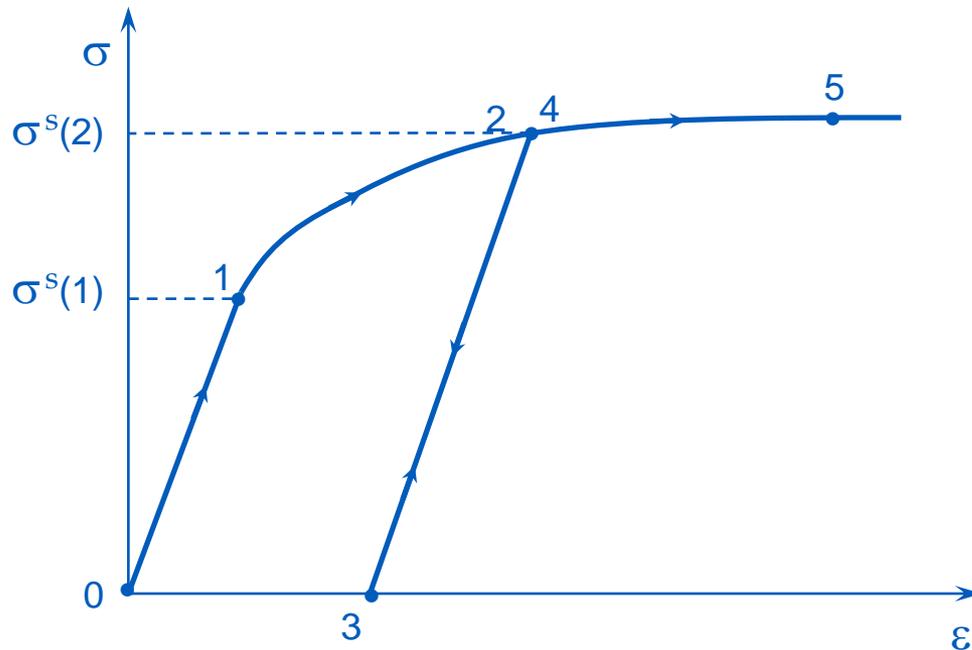
▶ 試験片での単軸引張 / 圧縮:



- 0-1: 弾性負荷
- 1-2: 塑性負荷
- 2-3: 弾性除荷
- 3-4: 弾性負荷
- 4-5: 塑性負荷

一般的な概念

▶ 試験片での単軸引張 / 圧縮



▶ 挙動のパターン

- 弾性 (0-1, 2-3, 3-4)
 - 可逆な全単射関係
 - $\sigma < \sigma^s$
- 塑性 (1-2, 4-5)
 - 負荷履歴に依存し非可逆
 - $\sigma = \sigma^s$

▶ 荷重 / 非荷重 基準

- 荷重: $\dot{\sigma} \geq 0$
- 非荷重: $\dot{\sigma} < 0$ $\dot{\epsilon}_p > 0$

一般的な概念

◆ 枠組み：機械力学と熱力学 (Eckart, Biot 1950)

- 状態変数によって定義された材料の状態
 - 着目する変数： (T, ε)
 - 内部の観察できない変数： (ε^p, V_k)
- 状態変数 Ψ による熱力学ポテンシャルの定義
 - その結果, 状態変数を関連する変数とを結びつける状態の法則が得られる

$$\underbrace{\sigma = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon^e}, \quad s = -\frac{\partial \Psi}{\partial T}}_{\text{熱弾性則}}, \quad \underbrace{A_k = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial V_k}}_{\text{定義}}$$

- 仮想的な散乱ポテンシャル φ の定義
 - その結果, 不可逆プロセスを記述する補足的な法則が得られる

$$\sigma = \rho \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{\varepsilon}^p}, \quad A_k = -\frac{\partial \varphi}{\partial \dot{V}_k}$$

一般的な概念：NL システム

▶ 非線形システム (3D 構成則, 微小摂動, 等温)

- ひずみの分離

$$\varepsilon(t) = \varepsilon^e(t) + \varepsilon^p(t)$$

- 弾性関係

$$\sigma(t) = A \cdot \varepsilon^e(t) \Leftrightarrow \sigma_{ij}(t) = \lambda \cdot \text{tr}(\varepsilon^e) \cdot \delta_{ij} + 2\mu \cdot \varepsilon_{ij}^e(t)$$

- 降伏クライテリア: 弾性域の設定

- 流れ則: 塑性ひずみ速度の設定

- 硬化変数の発展則

一般的な法則 : 塑性基準

▶ 3Dの中の弾性範囲の定義

- 目的 : 応力空間に弾性域を定義:

- f : 凸状のスカラー関数 (= 降伏曲面)

- 弾性域 : $f(\sigma) < 0$

- 弾性除荷 $f(\sigma) = 0$ and $\dot{f}(\sigma) < 0$

- 塑性流動 : $f(\sigma) = 0$ and $\dot{f}(\sigma) = 0$

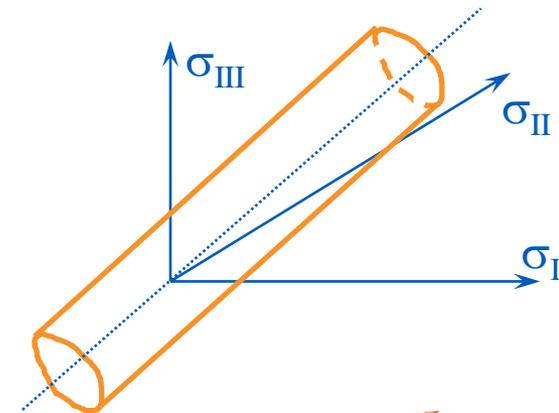
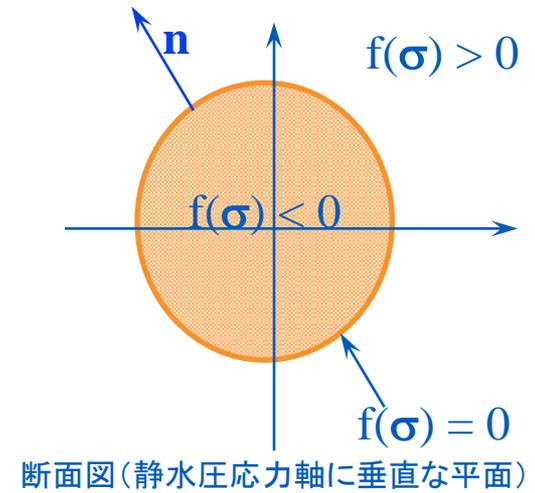
- 降伏曲面の外向き法線 : $n = \frac{\partial f}{\partial \sigma}$

- von Mises 基準 : σ_{eq} の関数としての $f(\sigma)$

- σ_{eq} とは : 偏差応力から定義される等価応力 (スカラー)

$$\sigma = \frac{1}{3} \text{tr}(\sigma) I_d + \tilde{\sigma} \quad \sigma_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2} \tilde{\sigma} \cdot \tilde{\sigma}}$$

- $f(\sigma)$ の発展は硬化タイプに依存



一般的な法則：流体

▶ 塑性流動の方向

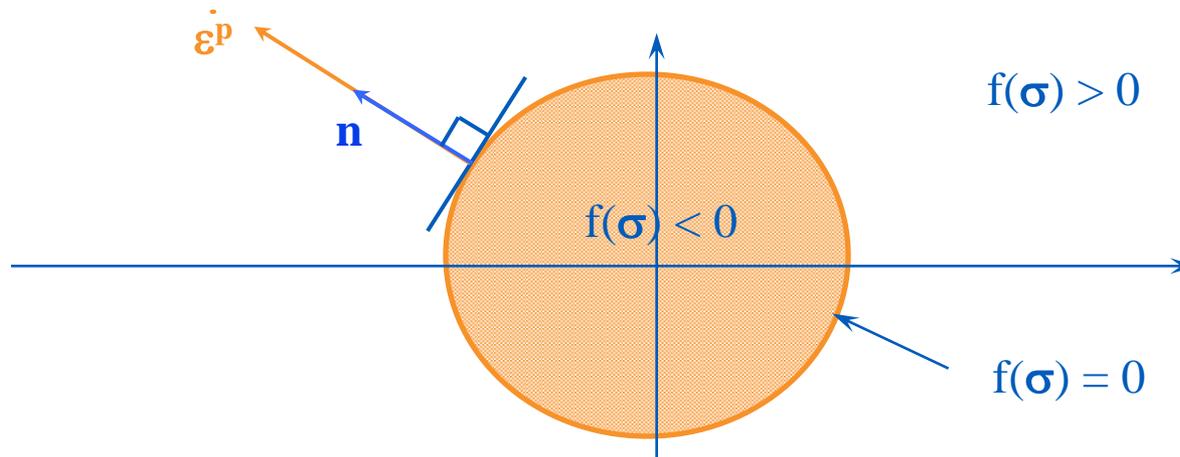
$$n = \frac{\partial f}{\partial \sigma}$$

- 問題： $\dot{\varepsilon}^P$ の方向の定義
- 仮定：塑性変形の流れ則は降伏クライテリア(降伏曲面)に直交(最大塑性仕事)
- 発展則(または直交則)

$$\dot{\varepsilon}^P = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma}$$

- 塑性乗数 $\dot{\lambda}$ (流れの強さ)は, 連続の関係から決定

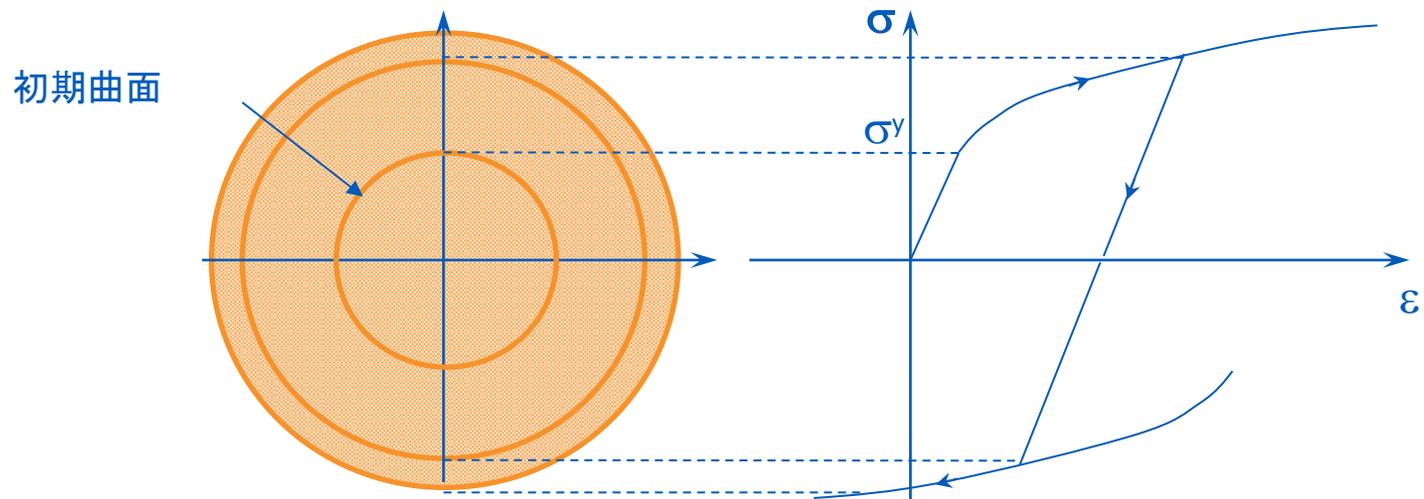
$$\dot{f} = 0$$



等方硬化の例

▶ 等方硬化則

- 弾性域の等方的な拡張を考慮

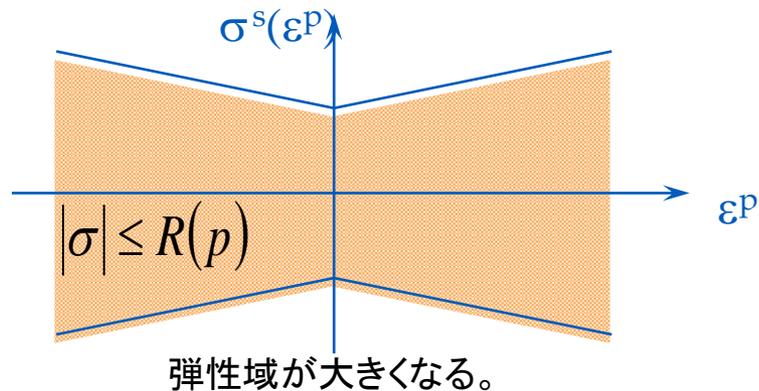


等方硬化の例

▶ 等方硬化則

- 弾性域の等方的な拡張
- 降伏曲面の発展は、単一のスカラーによって支配される
 - 内部変数：累積塑性ひずみ p
 - 関連する変数：熱力学的な力 R
- von Mises の基準 $f(\sigma) = \sigma_{eq} - R(p)$

単軸試験:



等方硬化の例

◆ 非線形システム (3D 構成則, 微小摂動, 等温)

- ひずみの分離:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon^e(t) + \varepsilon^p(t)$$

- 弾性関係:

$$\sigma(t) = A \cdot \varepsilon^e(t) \Leftrightarrow \sigma_{ij}(t) = \lambda \cdot \text{tr}(\varepsilon^e) \cdot \delta_{ij} + 2\mu \cdot \varepsilon^e_{ij}(t)$$

- 降伏基準:

$$f(\sigma, p) = \sigma_{eq} - R(p)$$

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2}(\tilde{\sigma}_{ij} \cdot \tilde{\sigma}_{ij})}$$

- 流れ則 (直交性):

$$\dot{\varepsilon}^p = \frac{3}{2} \dot{p} \frac{\tilde{\sigma}}{\sigma_{eq}}$$

$$\begin{cases} \dot{p} > 0 & \text{if } f(\sigma, p) = 0 \\ \dot{p} = 0 & \text{if } f(\sigma, p) < 0 \end{cases}$$

- $R(p)$ は応力-ひずみ曲線から導出

等方硬化の例

▶ $R(p)$ は応力-ひずみ曲線から導出

■ 単軸引張試験:

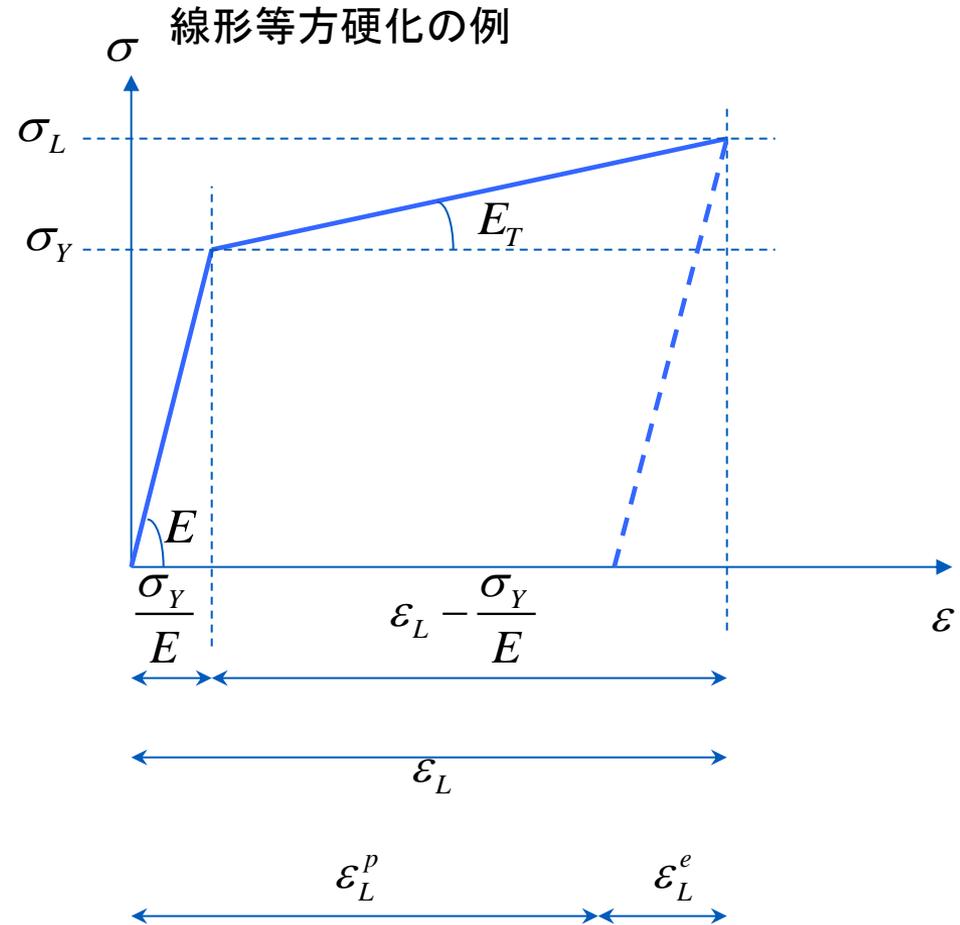
$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \sigma_{eq} = \sigma_L$$

■ 降伏基準が満足された時:

$$f = 0 \Leftrightarrow \sigma_L = R(p)$$

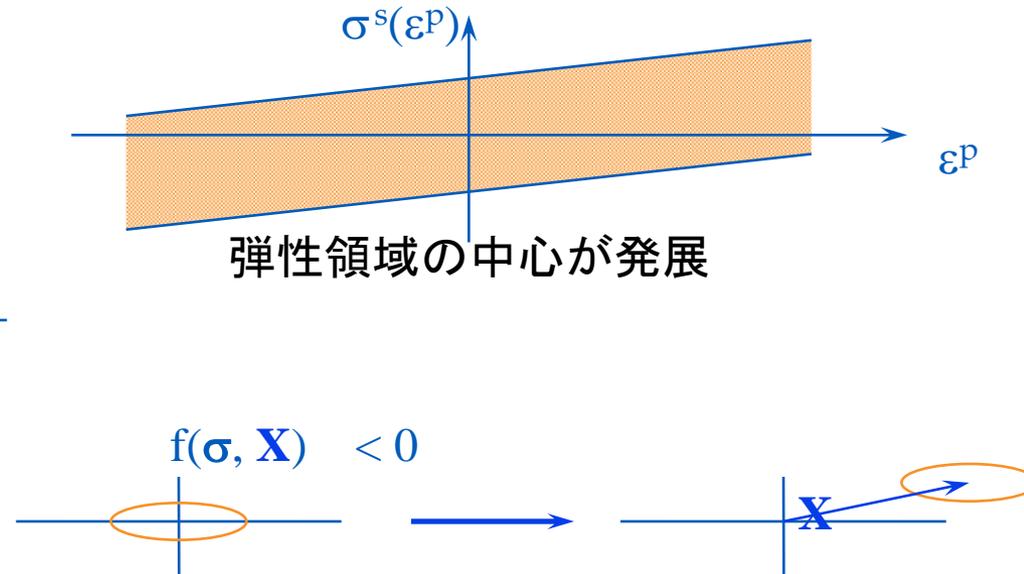
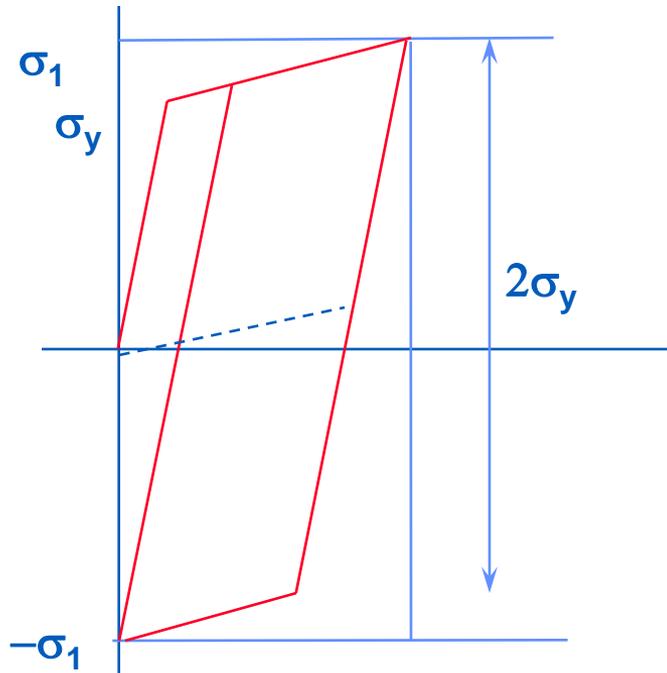
$$\text{or } \begin{cases} \sigma_L = \sigma_Y + E_T \left(\varepsilon_L - \frac{\sigma_Y}{E} \right) \\ \varepsilon_L = \varepsilon_L^e + \varepsilon_L^p = \frac{\sigma_L}{E} + p \end{cases}$$

$$\text{then } R(p) = \sigma_L = \sigma_Y + \frac{E_T \cdot E}{E - E_T} p$$



移動硬化の例

単軸試験:



▶ 弾性域の中心が、塑性ひずみに応じて発展（移動）

- 弾性域の移動
- テンソル変数 X の導入：弾性域の中心
- 降伏基準:

$$f(\sigma) = (\sigma - X)_{eq} - \sigma_y$$

移動硬化の例

▶ 非線形システム (3D構成則, 微小摂動, 等温)

■ ひずみの分離:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon^e(t) + \varepsilon^p(t)$$

■ 弾性関係:

$$\sigma(t) = A \cdot \varepsilon^e(t) \Leftrightarrow \sigma_{ij}(t) = \lambda \cdot \text{tr}(\varepsilon^e) \cdot \delta_{ij} + 2\mu \cdot \varepsilon^e_{ij}(t)$$

■ 降伏基準:

$$f(\sigma, p) = (\sigma - X)_{eq} - \sigma_y$$

■ 流れ則 (直交性):

$$(\sigma - X)_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2} \left((\tilde{\sigma} - X)_{ij} \cdot (\tilde{\sigma} - X)_{ij} \right)}$$

$$\dot{\varepsilon}^p = \frac{3}{2} \dot{p} \frac{\tilde{\sigma} - X}{(\sigma - X)_{eq}}$$

$$\begin{cases} \dot{p} > 0 & \text{if } f(\sigma, p) = 0 \\ \dot{p} = 0 & \text{if } f(\sigma, p) < 0 \end{cases}$$

■ 移動硬化

$$X = C \varepsilon^p \quad \left(\begin{array}{l} \text{硬化係数 } C \text{ は, 引張圧縮試験の応力} \\ \text{-ひずみ曲線から導かれる材料特性} \end{array} \right)$$

移動硬化の例

▶ C (移動硬化係数)は, 引張曲線から導出する

■ 単軸引張試験

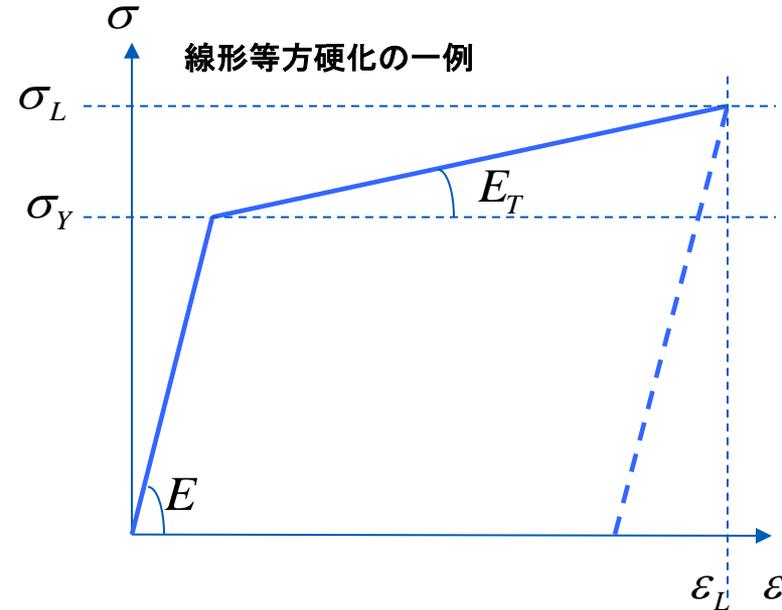
$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} X_L & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{X_L}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{X_L}{2} \end{pmatrix}$$

$$(\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{X})_{eq} = \sigma_L - \frac{3}{2} X_L$$

$$X_L = C \varepsilon_L^p = C \left(\varepsilon_L - \varepsilon_L^e \right) = C \left(\varepsilon_L - \frac{\sigma_L}{E} \right)$$

■ 降伏基準が満足されると

$$\begin{cases} \sigma_y = \sigma_L - \frac{3}{2} X_L \\ X_L = C \left(\varepsilon_L - \frac{\sigma_L}{E} \right) \\ \sigma_L = \sigma_y + E_T \left(\varepsilon_L - \frac{\sigma_y}{E} \right) \end{cases}$$



X_L は最初の2つの式から消去され

$$\rightarrow \sigma_y = a \sigma_L + b \varepsilon_L$$

その結果, 第3の式から係数 a と b が求まる

$$\rightarrow C = \frac{2}{3} E \frac{E_T}{E - E_T}$$

概要

▶ 一般的な概念

- 引張試験
- 熱力学の一般的な枠組み
- 弾性域の定義と一般法則
- 2つの例: 等方硬化と移動硬化

▶ Code_Asterの構成則

- ローカルポイント(ガウス点)で正確に計算されるもの
- 統合に関する数値的考慮
 - 等方硬化の解析的統合
 - 線形移動硬化の解析的統合
 - 一般的な統合
- 実用的な考慮事項
 - 構成則の定義
 - 材料パラメータの設定
 - 統合のためのパラメータ設定

▶ 高度な概念

- 線形検索
- 平面応力
- 準非圧縮性
- 微小変形 / 大変形

局所的な処理

▶ 内容

- 負荷増分でループ(時間ステップ)
 - 全体のつり合いを解く Newton反復のループ
 - Kの計算
 - F^{int} の計算
 - $K \cdot \delta u = L^{mech} - F^{int} \rightarrow \delta u$ の求解
 - つり合い残差力の計算
 - 収束の判定
 - ループの終り(平衡の達成)
- ループの終り(与えられた荷重への到達)

$i = 1$ to nb_incr
 $n = 0$ to nb_iter_max

▶ 構成則の統合の目的

- A) 初期接線剛性の決定 ($n = 0$)
- B) 接線剛性の修正を計算 ($n \neq 0$)
- C) 内力の計算 (F^{int})

局所的な処理

◆ A) `RIGI_MECA_TANG` 初期接線剛性の決定

- 0 回目の反復では前の平衡時間ステップ t_{i-1} における接線剛性を使用

$$K_i^0 = K_{i-1}$$

- 要素ごとに要素剛性マトリックスを求める

$$[K_i^0]_e = \int_e [\mathbf{Q}] \left[\left(\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right)_i^0 \right] [\mathbf{Q}]^T d\Omega \approx \sum_{k=1}^{npg} \omega_k [\mathbf{Q}(\boldsymbol{\xi}_k)] \left[\left(\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right)_i^0 (\boldsymbol{\xi}_k) \right] [\mathbf{Q}(\boldsymbol{\xi}_k)]^T$$

- ガウス点 $(\boldsymbol{\xi}_k, \omega_k)$ ごとの接線演算子は、前の平衡時間ステップにおける制約条件と内部変数から計算:

$$\begin{cases} \sigma_{i-1} \\ \alpha_{i-1} \end{cases} \rightarrow \left(\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right)_i^0$$

i: 時間ステップ
n: ニュートン反復

局所的な処理

◆ B) 各Newton反復における接線剛性の計算 **FULL_MECA**

- 反復 n では線形問題を解く:

$$\begin{cases} \mathbf{K}_i^n \cdot \delta \mathbf{u}_i^{n+1} + \mathbf{B}^T \cdot \delta \lambda_i^{n+1} = \mathbf{L}_i^{méca} - \mathbf{F}^{\text{int}}(\mathbf{u}_i^n) - \mathbf{B}^T \cdot \delta \lambda_i^n \\ \mathbf{B} \cdot \delta \mathbf{u}_i^{n+1} = 0 \end{cases}$$

- 接線剛性が既知である必要 $K_i^n = \Sigma [K_i^n]_e$
- 有限要素ごとに、要素接線剛性を求める^e

$$[K_i^n]_e = \int_e [\mathbf{Q}] \left[\left(\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right)_i^n \right] [\mathbf{Q}]^T d\Omega \approx \sum_{k=1}^{npg} \omega_k [\mathbf{Q}(\xi_k)] \left[\left(\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right)_i^n (\xi_k) \right] [\mathbf{Q}(\xi_k)]^T$$

- ガウス点 (ξ_k, ω_k) ごとの接線演算子は、前の平衡時間ステップでの応力と内部変数、および変位増分から計算:

$$\begin{cases} \sigma_{i-1}, \alpha_{i-1} \\ \boldsymbol{\varepsilon}(\Delta u_i^n) \end{cases} \rightarrow \left(\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right)_i^n$$

i: 時間ステップ
n: ニュートン反復

局所的な処理

◆ C) 内部力の計算 **RAPH_MECA**

- 反復 n では線形問題を解く:

$$\begin{cases} \mathbf{K}_i^n \cdot \delta \mathbf{u}_i^{n+1} + \mathbf{B}^T \cdot \delta \lambda_i^{n+1} = \mathbf{L}_i^{méca} - \mathbf{F}^{\text{int}}(\mathbf{u}_i^n) - \mathbf{B}^T \cdot \delta \lambda_i^n \\ \mathbf{B} \cdot \delta \mathbf{u}_i^{n+1} = 0 \end{cases}$$

- 内部力が既知である必要
 - 有限要素法ごと
 - ガウス点ごとに、構成則を統合

$$\mathbf{F}^{\text{int}}(\mathbf{u}_i^n) = \mathbf{Q}^T \cdot \sigma_i^n$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{i-1}, \alpha_{i-1} \\ \varepsilon(\Delta \mathbf{u}_i^n) \end{array} \right\} \rightarrow \sigma_i^n, \alpha_i^n$$

局所非線形問題の求解

- 結果:
 - ガウス点での応力場と内部変数
SIEF_ELGA, VARI_ELGA
 - 節点力ベクトル $\mathbf{Q}^T \cdot \sigma_i^n$

i: 時間ステップ
n: ニュートン反復

等方硬化の統合

▶ 等方硬化の統合 - 3D 構成則 (微小摂動, 等温)

- ひずみの分離:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon^e(t) + \varepsilon^p(t)$$

- 弾性関係:

$$\sigma(t) = A \cdot \varepsilon^e(t) \Leftrightarrow \sigma_{ij}(t) = \lambda \cdot \text{tr}(\varepsilon^e) \cdot \delta_{ij} + 2\mu \cdot \varepsilon^e_{ij}(t)$$

- 降伏基準:

$$f(\sigma, p) = \sigma_{eq} - R(p)$$

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2}(\tilde{\sigma}_{ij} \cdot \tilde{\sigma}_{ij})}$$

- 流れ則 (直交性)

$$\dot{\varepsilon}^p = \frac{3}{2} \dot{p} \frac{\tilde{\sigma}}{\sigma_{eq}}$$

$$\begin{cases} \dot{p} > 0 & \text{if } f(\sigma, p) = 0 \\ \dot{p} = 0 & \text{if } f(\sigma, p) < 0 \end{cases}$$

- $R(p)$ は応力-ひずみ曲線から導出

等方硬化の統合

▶ 時間離散化

- 陰関数の選択: 安定性
- 時間ステップの選択は問題の radial な性質に依存
- 入力:
 - t_{i-1} での (σ^-, p^-) の解
 - $\Delta\varepsilon$: n 回反復して評価
- 時間ステップ $t_{i-1} + \Delta t$ での未知変数

$$(\sigma^+, p^+) = (\sigma^- + \Delta\sigma, p^- + \Delta p)$$

等方硬化の統合

▶ $\sigma^- + \Delta\sigma$ の計算 (解析的方法)

- 記号: $\tilde{\sigma}^e = \tilde{\sigma}^- + 2\mu\Delta\tilde{\varepsilon}$ (既知)
- 基準の初期検証

if $(\tilde{\sigma}^e)_{eq} < R(p^-) \Rightarrow$ 弾性増分
 $\Delta p = 0, \quad \Delta\tilde{\sigma} = 2\mu\Delta\tilde{\varepsilon}$

- 上記が満足されないときは再計算

connu

$$\tilde{\sigma}^e = \tilde{\sigma}^- + \Delta\tilde{\sigma} + \text{fonction}(R, p)$$

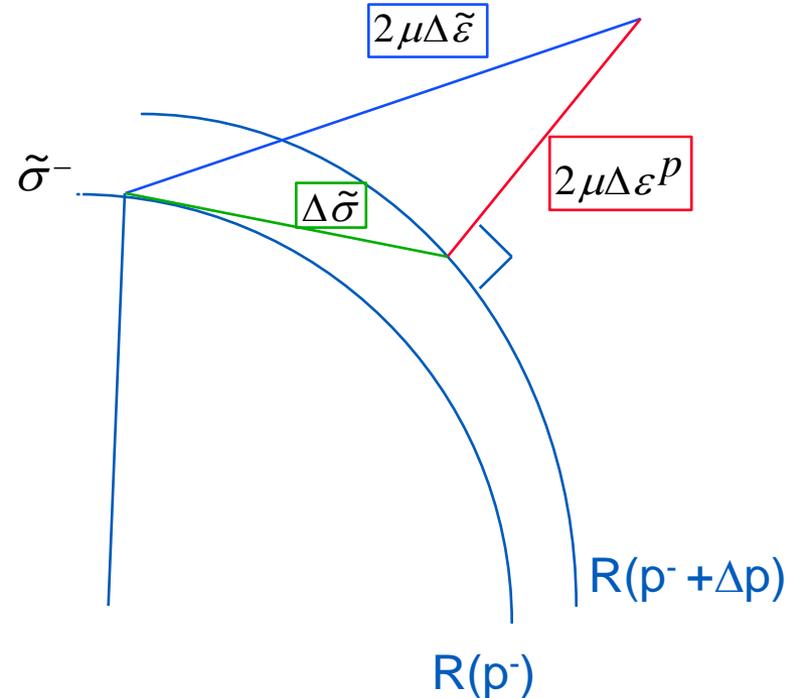
$$(\tilde{\sigma}^e)_{eq} = R(p^- + \Delta p) + 3\mu\Delta p \quad \leftarrow \Delta p \text{ についてのスカラー方程式}$$

$$\Rightarrow \Delta p = \text{formule}(\tilde{\sigma}^-, p^-, \Delta\tilde{\varepsilon}, \sigma_y, R') \Rightarrow 1^{\text{ère}} \text{ 内部変数}$$

$$\Rightarrow \tilde{\sigma}^- + \Delta\tilde{\sigma} = \text{formule}(\tilde{\sigma}^-, p^-, \Delta\tilde{\varepsilon}, \sigma_y, R')$$

$$\text{tr}(\Delta\sigma) = 3K.\text{tr}(\Delta\varepsilon)$$

$$\Delta\sigma$$



等方硬化の統合

解析的な接線演算子の初期設定

- 前の平衡時間ステップ t_{i-1} における応力と内部変数から接線演算子を計算

$$\begin{cases} \sigma_{i-1} \\ \alpha_{i-1} \end{cases} \rightarrow \left(\frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \right)_i^0$$

- 設定: $\sigma = \sigma_{i-1}$

- 原理: 問題の定式化から求まる塑性ひずみ速度 (温度変化を無視)

$$\begin{aligned} \dot{f}(\sigma, p) = 0 &\Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial \sigma} : \dot{\sigma} + \frac{\partial f}{\partial p} \dot{p} = 0 \\ \Rightarrow \dot{\varepsilon}^p &= \frac{9\mu}{2} \frac{\tilde{\sigma} : \dot{\varepsilon}}{3\mu + R'(p)} \frac{\tilde{\sigma}}{(\sigma_{eq})^2} \quad \text{if } f = 0 \end{aligned}$$

$$\sigma_{ij} = K \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu (\tilde{\varepsilon}_{ij} - \varepsilon_{ij}^p)$$

$$\left(\frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \right) \text{ の解析的定式化}$$

第2の内部変数に含まれる情報から、前時間ステップで降伏が生じていたかを知る必要がある

等方硬化の統合

Newton反復 n での接線演算子の計算 (解析的方法)

■ FULL_MECA

- 直前の平衡時間ステップにおける応力, 内部変数と変位増分から接線演算子を計算

$$\begin{cases} \sigma_{i-1}, \alpha_{i-1} \\ \varepsilon(\Delta \mathbf{u}_i^n) \end{cases} \rightarrow \left(\frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \right)_i^n$$

- 原理: $\sigma = \sigma^- + \Delta \sigma$ で微分 (直交性)

$$\dot{\varepsilon}^p = \frac{3}{2} \dot{p} \frac{\tilde{\sigma}}{\sigma_{eq}} \Rightarrow \delta \varepsilon^p = \frac{3}{2} \left(\delta p \frac{\tilde{\sigma}}{\sigma_{eq}} + \Delta p \frac{\delta \tilde{\sigma}}{\sigma_{eq}} - \frac{3}{2} \Delta p \frac{\tilde{\sigma} : \delta \tilde{\sigma}}{(\sigma_{eq})^3} \tilde{\sigma} \right)$$

ここで, $\partial \varepsilon^p, \partial p, \partial \tilde{\sigma}$ は, 問題の弾塑性増分解析解まわりの有限増分で定義

等方硬化の統合

▶ 時間離散化

- 陰を選択: 安定
- 時間ステップの選択は問題の radial な性質に依存
- 入力:
 - t_{i-1} での (σ^-, X^-) の解
 - $\Delta\varepsilon$: 反復 n での評価
- 時間ステップ $t_{i-1} + \Delta t$ での未知変数

$$(\sigma^+, X^+) = (\sigma^- + \Delta\sigma, X^- + \Delta X)$$

等方硬化の統合

▶ $\sigma^- + \Delta\sigma$ の計算 (解析的方法)

- 記号: $\tilde{\sigma}^e = \tilde{\sigma}^- + 2\mu\Delta\tilde{\varepsilon} - X^-$
- 降伏基準の初期判定

$$\text{if } (\tilde{\sigma}^e)_{eq} < \sigma_y \Rightarrow \text{elastic increment}$$
$$\Delta p = 0, \quad \Delta\tilde{\sigma} = 2\mu\Delta\tilde{\varepsilon}$$

- 上記が満足されない場合は再計算

$$\overset{\text{connu}}{\sigma^e} = \tilde{\sigma}^- + \Delta\tilde{\sigma} + \text{fonction}(C, \Delta p)$$

$$(\sigma^e)_{eq} = \sigma_Y + \frac{3}{2}(2\mu + C)\Delta p \quad \leftarrow \Delta p \text{ についてのスカラー方程式}$$

$$\Rightarrow \Delta p$$

$$\text{puis } \Delta\tilde{\sigma} \text{ et } \Delta X \quad (\text{6個の内部変数} + \xi)$$

構成則の一般的な統合

▶ 一般的な場合

- 初期降伏判定:

$$\text{if } f(\sigma^- + A\Delta\varepsilon, \alpha^-)_{eq} < 0 \Rightarrow \text{elastic increment}$$
$$\Delta\lambda = 0, \quad \Delta\sigma = A\Delta\varepsilon \text{ and } \Delta\alpha = 0$$

- 上記が満足されないときは, $\Delta\alpha, \Delta\sigma$ に関する非線形システムを解く

$$f(\sigma + \Delta\sigma, \alpha + \Delta\alpha) = 0$$
$$\Delta\sigma = A(\Delta\varepsilon - \Delta\varepsilon^p)$$
$$\Delta\varepsilon^p = \Delta\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma}, \Delta\alpha = \Delta\lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma}$$

n は通常かなり小さい (10-50)

- n 個の非線形方程式で記述される局所系を解く
- 陽解法 (Runge-Kutta) or 陰解法 (Newton)

構成則の統合：まとめ

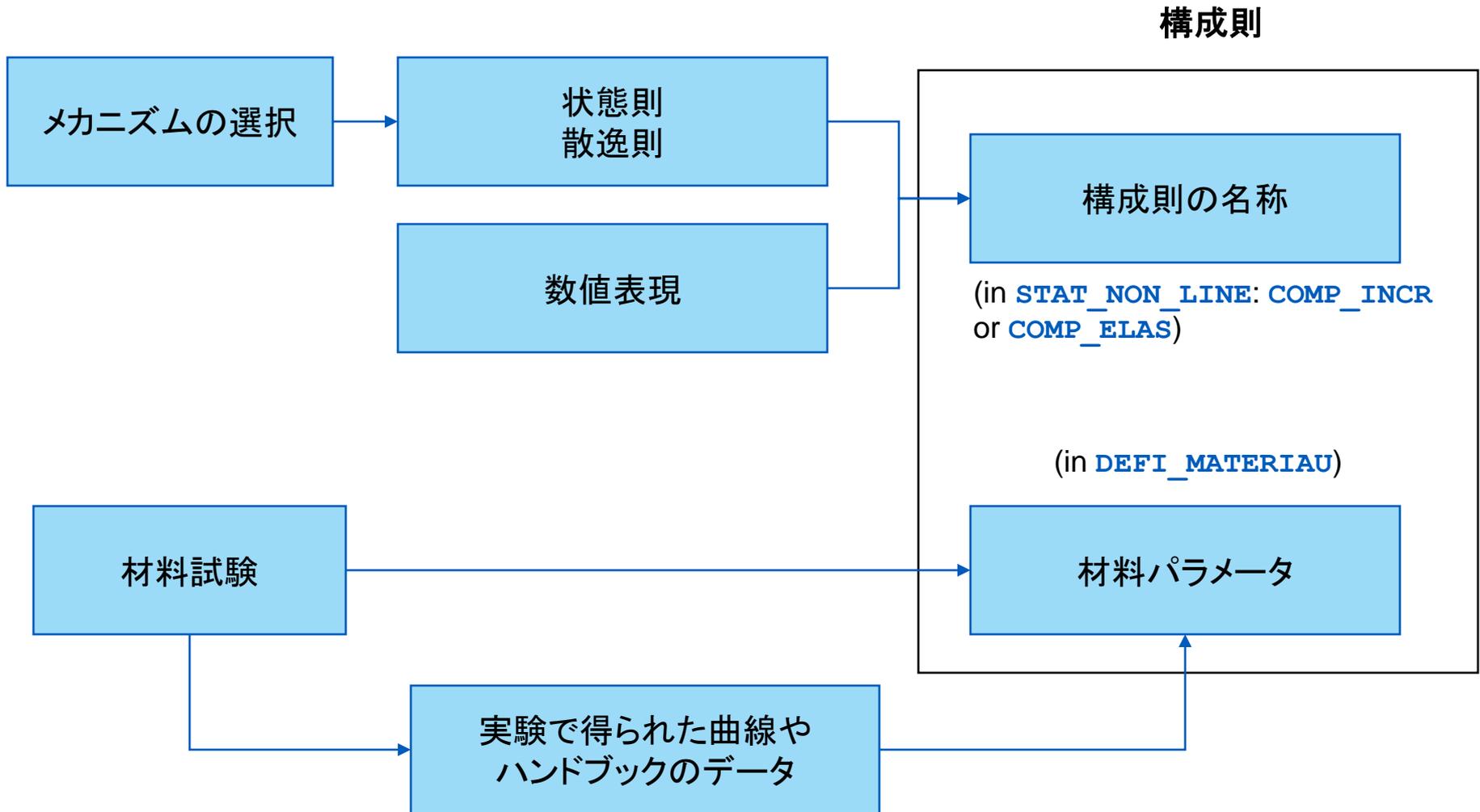
▶ 一般的なケース

- 実際には *Code_Aster* の中で数個の構成則
- n 個の方程式で記述される局所非線形システムを解く
- 陽解法(Runge-Kutta) または陰解法 (Newton)

▶ 特殊なケース

- ある種の構成則(実際には*Code_Aster*の中での法則のほとんど)は,
- 1個のスカラー方程式に縮約される $\Delta\lambda : \gamma(\Delta\lambda) = 0$
- 様々な方法(secant, Newton, Dekker, Brent)によって解かれる
- **いくつかの構成則**(例えば, von Mises 等方硬化則, 線形移動硬化則)の解析が可能

構成則の定義方法



利用可能な構成則

▶ Ver. 10(安定版)には160以上の構成則がある

▶ さまざまな分野への応用

- 金属, 多結晶金属
- コンクリート
- 土壌

▶ さまざまな現象

- 中性子照射
- 損傷またはき裂
- 冶金的な相

▶ ドキュメント

- 非線形構成則の統合: U4.51.11
- [DEFI_MATERIAU](#) 文法: U4.43.01

利用可能な構成則

▶ 2D と 3D の連続媒体

- 非線形弾性

- Von Mises疑似等方硬化

- ELAS_VMIS_LINE

- ELAS_VMIS_TRAC

- ELAS_HYPER

- 弾塑性増分解析

- Von Mises等方硬化, 線形移動硬化, 複合硬化

- VMIS_ISOT_TRAC

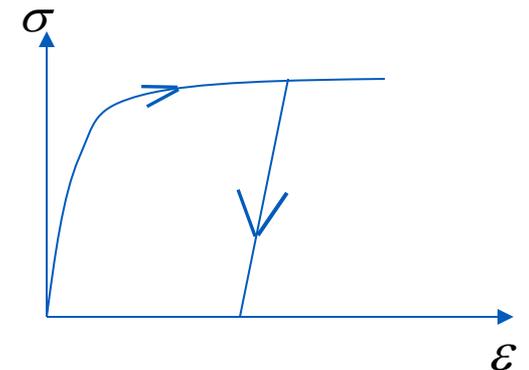
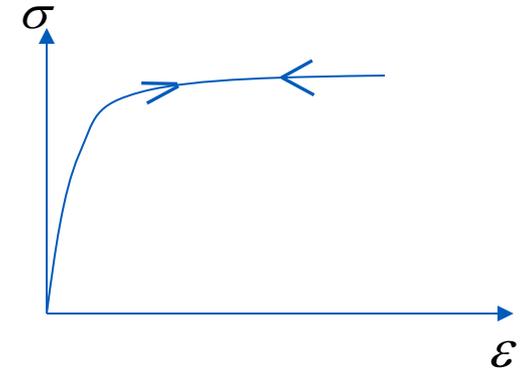
- VMIS_ISOT_PUIS

- VMIS_ISOT_LINE

- VMIS_CINE_LINE

- VMIS_ECMI_TRAC

- VMIS_ECMI_LINE



利用可能な構成則

▶ 2D と 3D の連続媒体 (つづき)

- 他の弾塑性モデル (金属)
 - VMIS_CIN1_CHAB
 - VMIS_CIN2_CHAB
 - VMIS_CIN2_MEMO
- 粘弾塑性 (金属)
 - LEMAITRE, LEMA_SEUIL
 - VISC_CIN1_CHAB
 - VISC_CIN2_CHAB
 - VISC_ISOT_LINE
 - VISC_ISOT_TRAC
 - VISC_TAHERI
 - VISCOCHAB
- 極限荷重
 - NORTON_HOFF
- 多結晶金属
 - POLY_CFC
 - MONOCRISTAL
 - POLYCRISTAL
- 中性子照射環境下での粘弾塑性
 - LMARC
 - LEMAITRE_IRRA
 - GATT_MONNERIE
 - VISC_IRRA_LOG
 - GRAN_IRRA_LOG
 - IRRAD3M

利用可能な構成則

▶ 2D と 3D の連続媒体(つづき)

■ 金属の損傷またはき裂

- ENDO_FRAGILE
- VENDOCHAB
- ROUSSELIER
- ROUSS_PR
- ROUSS_VISC
- RUPT_FRAG
- BARENBLATT

■ 鋼あるいはジルコニウムの冶金的相変化(粘弾塑性)

- META_X_Y_Z
- X = P (塑性) or V (粘性)
- Y = IL (線形等方) or INL (非線形等方硬化) or CL (線形移動硬化)
- Z = RE (回復) and/or PT (変態塑性)

■ コンクリート

- BETON_DOUBLE_DP
- GRANGER_FP
- GRANGER_FP_V
- GRANGER_FP_INDT
- BAZANT_FP
- ENDO_ISOT_BETON
- ENDO_ORTH_BETON
- MAZARS
- JOINT_BA
- CORR_ACIER
- KIT_DDI
- BETON_REGLE_PR
- BETON_UMV_FP

利用可能な構成則

▶ 2D と 3D の連続媒体 (つづき)

- 土壌または地盤材料
 - DRUCK_PRAGER(N_A)
 - CAM_CLAY, BARCELONE
 - CJS, HUJEUX
 - LAIGLE, LETK
 - HOEK_BROWN
 - KIT_HM, KIT_HHM, KIT_THH, KIT_THM, KIT_THHM

▶ 板, シェル, 配管 (局所的挙動 = 平面応力)

- すべて 3D の構成則 (`C_PLAN` がサポートされていない場合には有効:
`ALGO_C_PLAN = 'DEBORST'`)

▶ 棒, 多芯繊維はり, グリッド

- すべて 1D の挙動 (`1D` がサポートされてなければ、DeBorst法が有効:
`ALGO_1D = 'DEBORST'`)

▶ 離散要素, せん断接合, 補強

材料データ

▶ “材料” エントリー

- リファレンス材料 (AFNORの名称)
 - 圧力容器鋼 16MND5
 - Inconel 600 tubes (GV), ...

製品の特質(等級)によっては、特性値が大きく変わり得ることに注意

▶ 2つのアクセス方法

- www.code-aster.org (documentation / Materials) からのドキュメントを参照
- *Code_Aster* からの自動アクセス

▶ 品質保証

- MMC部門で独立した検証

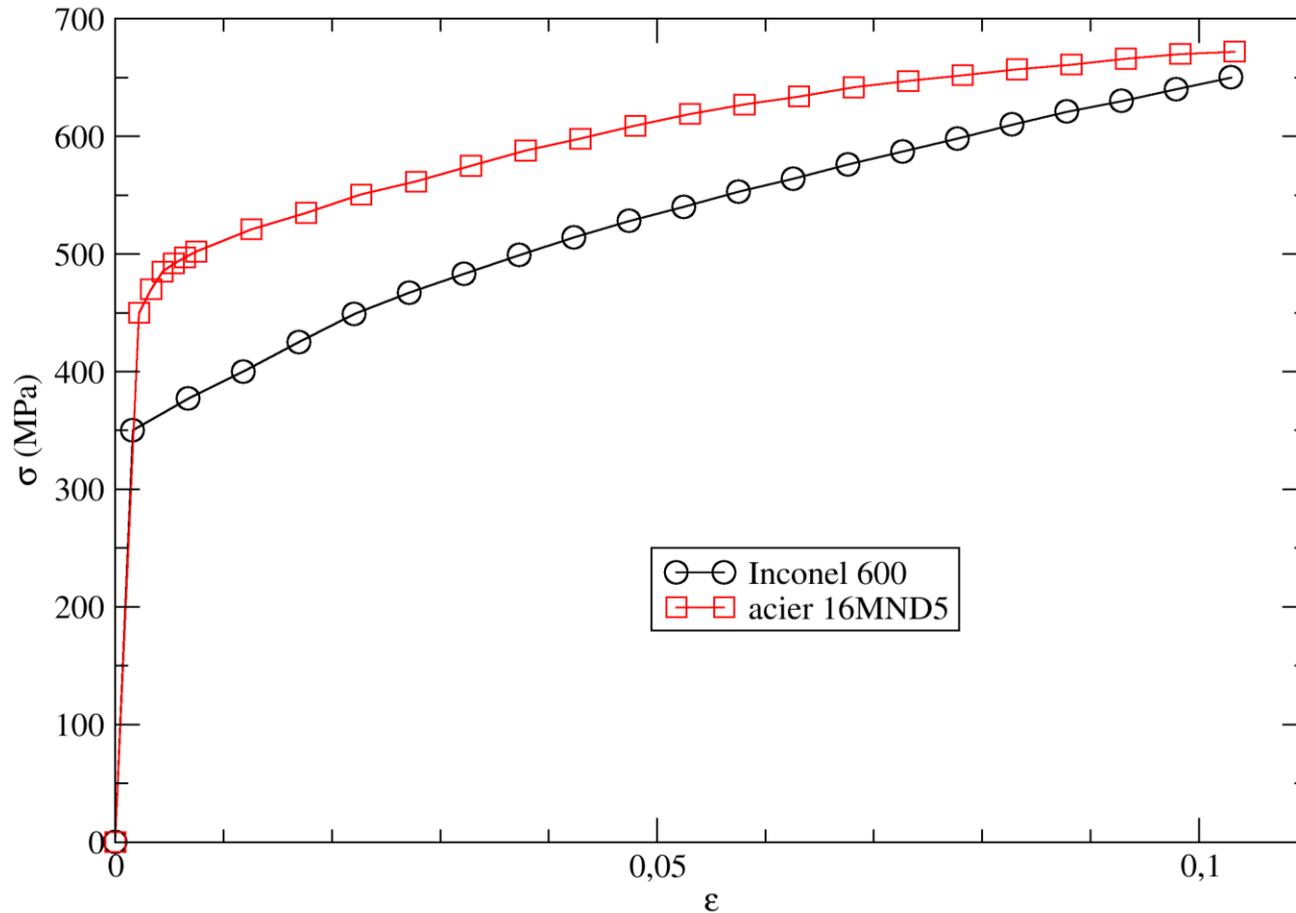
▶ Version 10 では 55個の材料エントリー

- 必要な材料だけ追加

```
INCLUDE_MATERIAU
  (NOM_AFNOR='A42',
   TYPE_MODELE='REF',
   VARIANTE='A',
   TYPE_VALE='NOMI',
   NOM_MATER='MAT',
   EXTRACTION=( _F (COMPOR='ELAS',
                     TEMP_EVAL=20.),
                 _F (COMPOR='THER',
                     TEMP_EVAL=20.))
  )
```

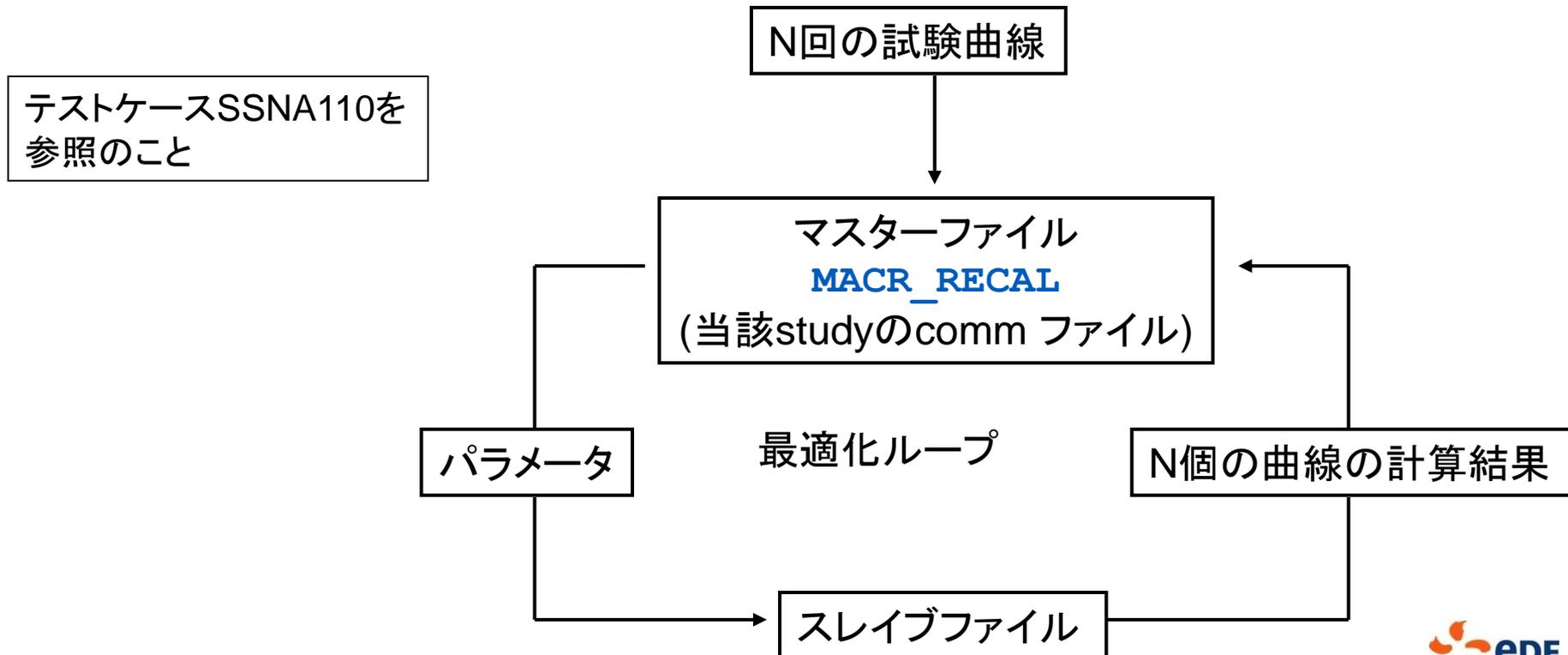
材料データ

20°Cでの応力-ひずみ曲線
Courbe de traction (à 20°C)

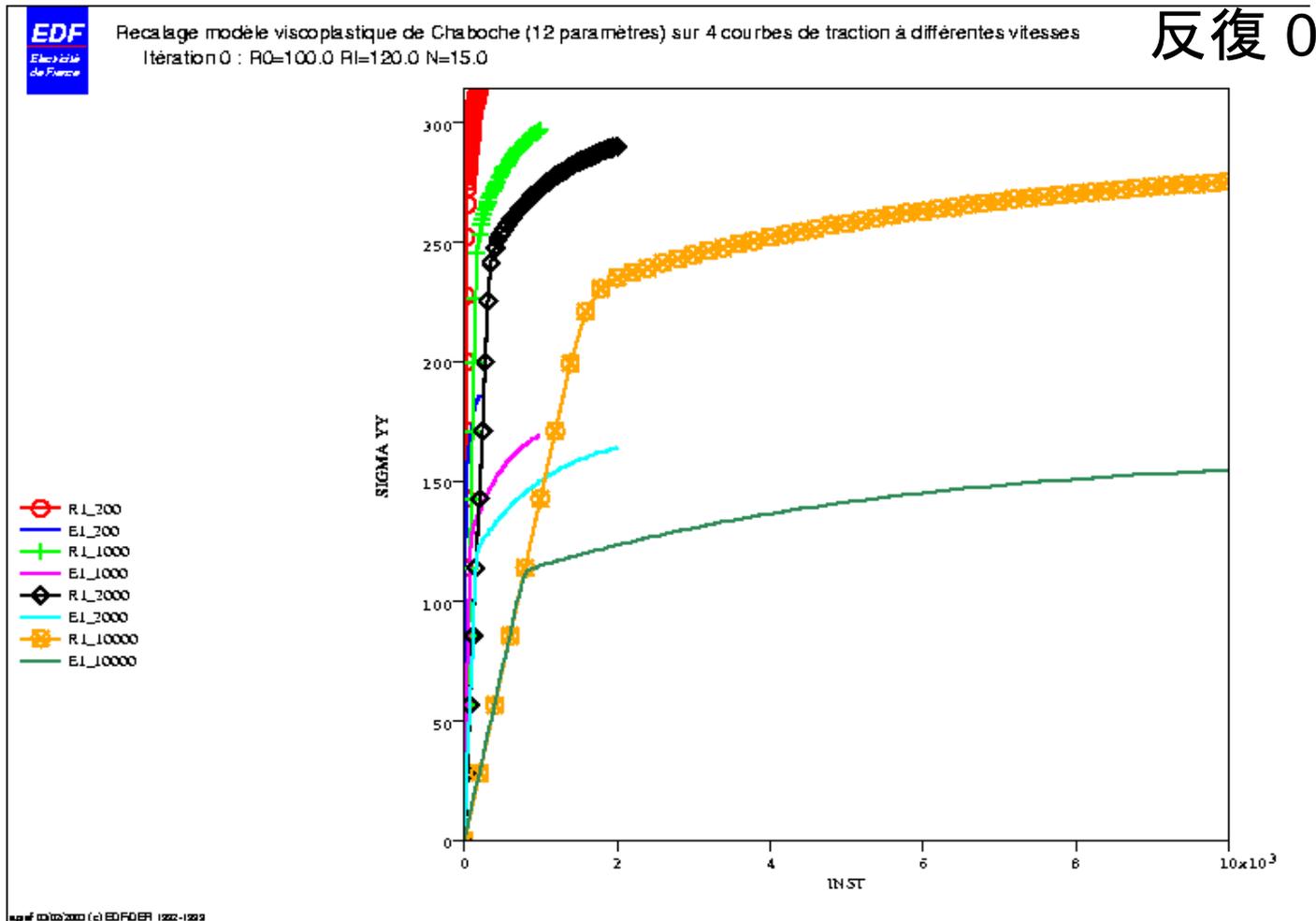


材料パラメータのフィッティング

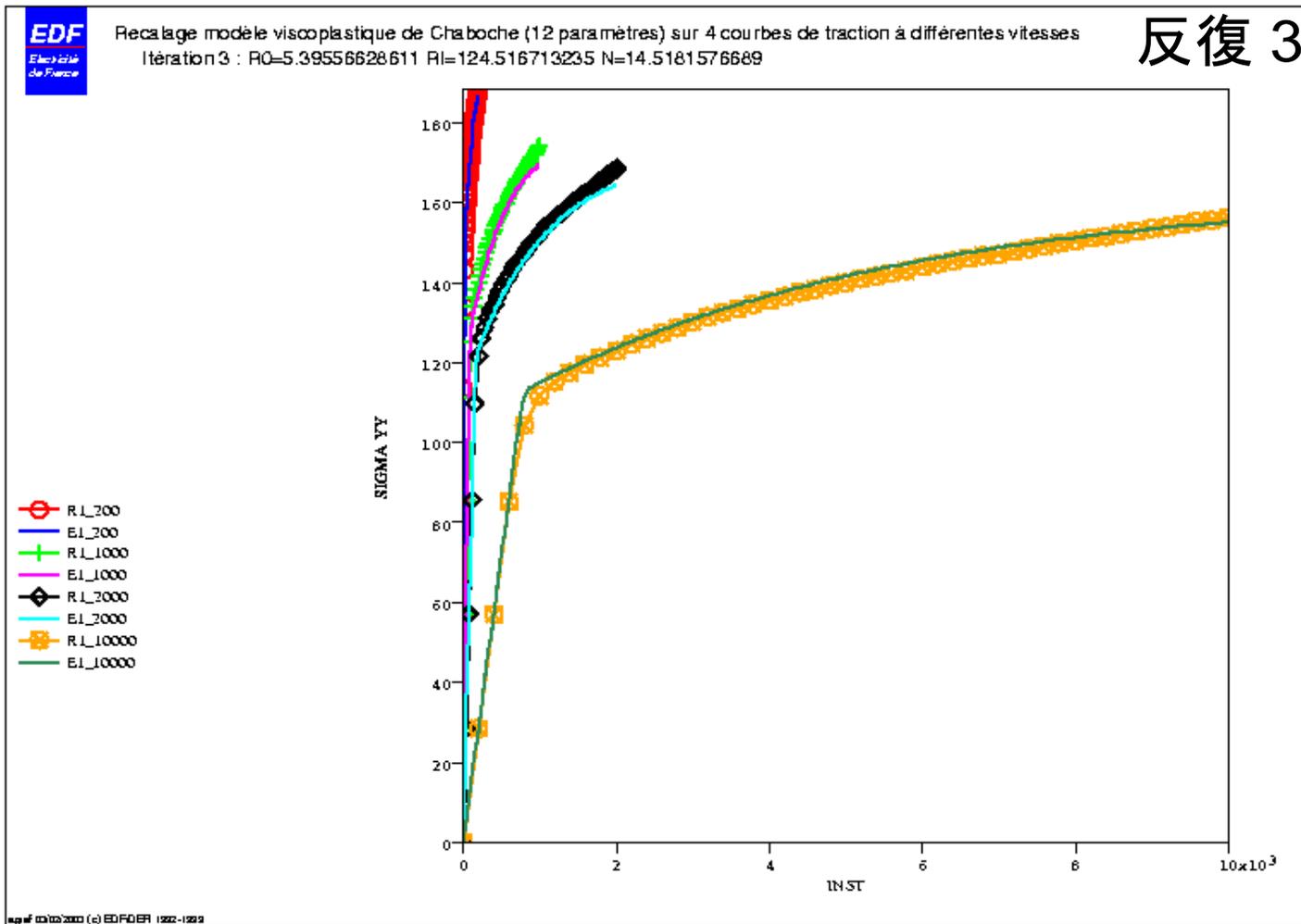
- ◆ 構成則が既知の場合
- ◆ この構成則のパラメータの値を検索
- ◆ 次を行う:
 - 材料試験から得られたデータが使える
 - これらの材料試験データをもっとも良好に再現するようパラメータを探索する



材料パラメータのフィッティング



材料パラメータのフィッティング



構成則統合の文法

▶ 統合のためのパラメータの選択:

- キーワード `COMP_INCR` の場合

▶ 一般的なケース:

- n 個の方程式からなる局所的非線形システムの解
- `ALGO_INTE =`

陽解法	特定の構成式に対して線形探索の可能性を持つ 局所Newton反復による陰解法	
<code>RUNGE_KUTTA</code>	<code>NEWTON</code>	<code>NEWTON_RELI</code>
<code>VISCOCHAB, VENDOCHAB, POLYCRISTAL, MONOCRISTAL VMIS_POU_FLEJOU, VMIS_POU_LINE</code>	<code>VISCOCHAB, LMARC, MONOCRISTAL, IRRAD3M, CJS, HUJEUX...</code>	<code>VISCOCHAB, LMARC, MONOCRISTAL, IRRAD3M</code>

構成則統合の文法

▶ 一般的なケース:

- 収束
 - 判定残差: `RESI_INTE_RELA` (10^{-6})
 - 最大反復回数: `ITER_INTE_MAXI` (20)
- ヒント
 - 統合が難しい挙動に対しては、`ITER_INTE_MAXI` を増加する
 - `ssnd105b` では、`VISCOCHAB` に対して `ITER_INTE_MAXI = 250`
 - `ssnv172a` では、`MONOCRISTAL` に対して `ITER_INTE_MAXI = 100`
 - `ssnl106i` では、`VMIS_POU_LINE` に対して `ITER_INTE_MAXI = 500`
 - ある種の挙動(例: Hujoux) に対しては、収束判定値を細かくした方がよい:
`RESI_INTE_RELA = 10-8`

構成法統合の文法

◆ 特殊なケース:

- いくつかの構成則について(実際には, *Code_Aster* の構成則のほとんど)
- 問題が単一のスカラ方程式へ縮約される $\Delta\lambda: \gamma(\Delta\lambda) = 0$
- 様々な方法で解く:
 - `ALGO_INTE = 'SECANTE', 'DEKKER', 'NEWTON_1D', 'BRENT'`
 - 収束: `RESI_INTE_RELA (10-6), ITER_INTE_MAXI (20)`
- 解析的解決策
 - `VMIS_ISOT_LINE, VMIS_ISOT_TRAC, VMIS_ISOT_PUIS, ...`
 - `CZM_*, ENDO_SCALAIRE, ...`
 - 追加のキーワードは不要(平面応力を除く)
 - 例: hsnv125a: 3次元で `VMIS_ISOT_LINE` プラス ~~`ITER_INTE_MAXI = 100`~~

概要

▶ 一般的な概念

- 引張試験
- 熱力学の一般的な枠組み
- 弾性域の定義と一般法則
- 2つの例: 等方硬化と移動硬化

▶ *Code_Aster*の構成則

- ローカルポイント(ガウス点)で正確に計算されるもの
- 統合に関する数値的考慮
 - 等方硬化の解析的統合
 - 線形移動硬化の解析的統合
 - 一般的な統合
- 実用的な考慮事項
 - 構成則の定義
 - 材料パラメータの設定
 - 統合のパラメータ設定

▶ 高度な概念

- 線形検索
- 平面応力
- 準非圧縮性
- 微小変形 / 大変形

局所的Newton反復のための線形検索

▶ 目的：局所的Newton反復のロバスト性を改善する

▶ 原理:

- 解くべき問題のシステムに関連する関数を導入 $\rightarrow F$
- この関数の最小化を行う
- 探索方向は関数 F の下降方向とする
- 下降方向に沿って F を減少させる進行ステップ ρ を選択

▶ アルゴリズム:

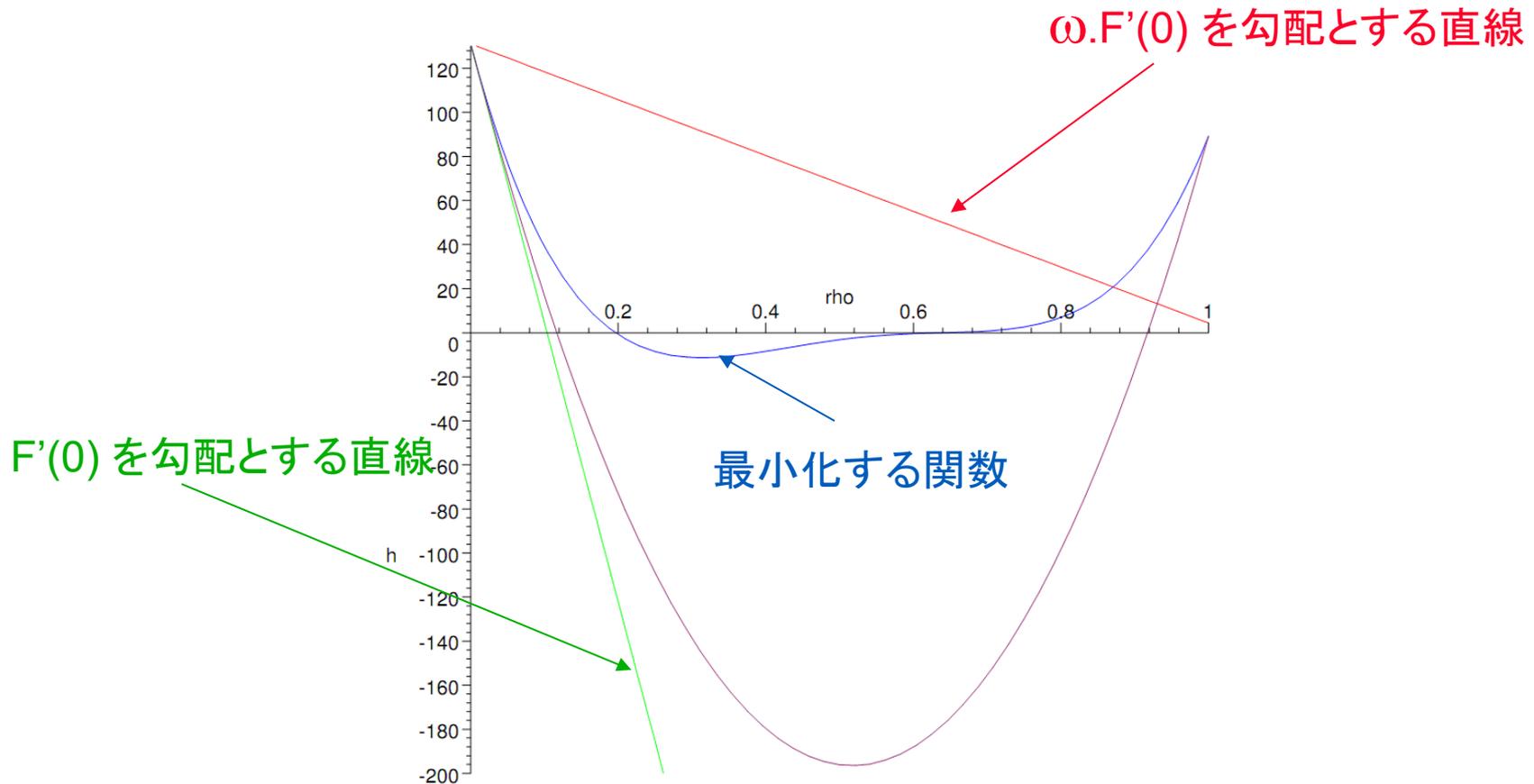
- システム $f(x) = 0$
- $d_k = -[\nabla f(x_k)]^{-1} \cdot f(x_k)$
- $x_{k+1} = x_k + \rho \cdot d_k$
 - 進行ステップ ρ を計算
 - $F(x_k + \rho \cdot d_k) < F(x_k)$ となる ρ の最適値は $\rho = \text{Arg min}[F(x_k + \rho \cdot d_k)]$
 - 関数 F の導入

▶ 文法: `ALGO_INTE = 'NEWTON_RELI'`

局所的Newton反復のための線形検索

Armijo のルール

- $F(\rho) \leq F(0) + \omega \cdot F'(0) \cdot \rho$ であれば, ρ を保持



平面応力

▶ 等方硬化の例

- 追加される方程式 : $\Delta\sigma_{33} = 0$
- 結果: 追加される未知数: $\Delta\varepsilon_{33} = 0$

$$\Delta\varepsilon = \Delta\varepsilon^c + \Delta\varepsilon^y$$

$$\text{既知} : \Delta\varepsilon_{33}^c = -\frac{\nu}{1-\nu} \left(\Delta\varepsilon_{11}^c(u) + \Delta\varepsilon_{22}^c(u) \right)$$

$$\text{未知} : \Delta\varepsilon^y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta y \end{bmatrix}$$

平面応力

◆ 等方硬化の例

- 初期判定

$$\text{if } \left(\tilde{\sigma}^- + 2\mu\Delta\tilde{\varepsilon} \right)_{eq} < R(p^-) \Rightarrow \text{弾性増分}$$
$$\Delta p = 0, \Delta\tilde{\sigma} = 2\mu\Delta\tilde{\varepsilon} \text{ et } \Delta y = 0$$

- 上記が満足されない場合, 常に非線形となる Δp に関するスカラー方程式を解く

$$\begin{cases} \left(\tilde{\sigma}^- + 2\mu\Delta\tilde{\varepsilon}^c + 2\mu\Delta\tilde{\varepsilon}^y \right)_{eq} = R(p^- + \Delta p) + 3\mu\Delta p \\ \Delta y = \frac{3(1-2\mu)\Delta p}{E\Delta p + 2(1-\mu)R(p^- + \Delta p)} \tilde{\sigma}_{33}^e \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 1 \text{ Pにおける非線形スカラー方程式} \quad \Rightarrow \Delta p, p = p^- + \Delta p, \sigma$$

- secant 法で方程式を解く

- 収束: `RESI_INTE_REL`, `ITER_INTE_MAXI`
- 他の挙動に対しては表現が困難

平面応力

◆ 一般的な方法: DeBorst (`ALGO_C_PLAN = 'DEBORST'`)

- 発想 (*R. DeBorst*): 静的圧縮 [R5.03.03]
 - 平面応力状態: 構成則のレベルではなく平衡状態
 - Newton反復中: $\sigma_{zz}^n \rightarrow 0$ となる応力場

■ 原理:

- zz成分の分離

$$\sigma = \begin{pmatrix} \hat{\sigma} \\ \sigma_{zz} \end{pmatrix}, \quad \varepsilon = \begin{pmatrix} \hat{\varepsilon} \\ \varepsilon_{zz} \end{pmatrix}$$

- 接線行列を使用 :

$$d\sigma = \begin{bmatrix} \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \end{bmatrix} d\varepsilon = D \cdot d\varepsilon \quad \frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{11} & \mathbf{D}_{12} \\ \mathbf{D}_{21} & \mathbf{D}_{22} \end{bmatrix}$$

- 2回の反復の間で増加する $d\sigma$, $d\varepsilon$ を選択

$$d\sigma = \sigma^{n+1} - \sigma^n = \Delta\sigma^{n+1} - \Delta\sigma^n \quad \begin{bmatrix} d\hat{\sigma} \\ d\sigma_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\sigma}_{n+1} - \hat{\sigma}_n \\ \sigma_{zz}^{n+1} - \sigma_{zz}^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{11} & \mathbf{D}_{12} \\ \mathbf{D}_{21} & \mathbf{D}_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d\hat{\varepsilon}^{n+1} \\ d\varepsilon_{zz}^{n+1} \end{bmatrix}$$

- zz成分をキャンセル

$$\begin{bmatrix} \hat{\sigma}^{n+1} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\sigma}^n \\ \sigma_{zz}^n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{11} & \mathbf{D}_{12} \\ \mathbf{D}_{21} & \mathbf{D}_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d\hat{\varepsilon}^{n+1} \\ d\varepsilon_{zz}^{n+1} \end{bmatrix}$$

平面応力

◆ 一般的な方法: DeBorst (`ALGO_C_PLAN = 'DEBORST'`)

- zz 成分をキャンセル
(静的圧縮)

$$\begin{cases} \hat{\sigma}^{n+1} = \left(\mathbf{D}_{11}^n - \frac{\mathbf{D}_{12}^n \cdot \mathbf{D}_{21}^n}{D_{22}} \right) d\hat{\varepsilon}^{n+1} + \hat{\sigma}^n - \frac{\mathbf{D}_{12}^n}{D_{22}} \sigma_{zz}^n \\ \Delta \varepsilon_{zz}^{n+1} = \Delta \varepsilon_{zz}^n - \frac{\sigma_{zz}^n}{D_{22}} + \frac{\mathbf{D}_{21}^n}{D_{22}} \Delta \hat{\varepsilon}^n - \frac{\mathbf{D}_{21}^n}{D_{22}} \Delta \hat{\varepsilon}^{n+1} \end{cases}$$

平衡方程式に戻る:

$$\int \mathbf{B}^t \cdot \hat{\sigma}^{n+1} dv = \int \hat{\mathbf{B}}^t \cdot \hat{\sigma}^{n+1} dv = \mathbf{L} = \int \hat{\mathbf{B}}^T \left(\mathbf{D}_{11}^n - \frac{\mathbf{D}_{12}^n \cdot \mathbf{D}_{21}^n}{D_{22}} \right) \hat{\mathbf{B}} \cdot d\mathbf{u}^{n+1} + \int \hat{\mathbf{B}}^T \left(\hat{\sigma}^n - \frac{\mathbf{D}_{12}^n}{D_{22}} \sigma_{zz}^n \right)$$

接線剛性と第2成分に追加する項:

$$\mathbf{K}^n = \int \hat{\mathbf{B}}^T \left(\mathbf{D}_{11}^n - \frac{\mathbf{D}_{12}^n \cdot \mathbf{D}_{21}^n}{D_{22}} \right) \hat{\mathbf{B}} \quad \mathbf{R}(\Delta \mathbf{u}^{n+1}) = \int \hat{\mathbf{B}}^T \left(\hat{\sigma}^n - \frac{\mathbf{D}_{12}^n}{D_{22}} \sigma_{zz}^n \right)$$

平面応力

◆ 一般的な方法: DeBorst (`ALGO_C_PLAN = 'DEBORST'`)

◆ 利点

- すべての構成則に有効: 補正を行うことで3D同様に統合
すべての構成則は `C_PLAN` の中で利用可能

■ 欠点

- 更新された接線行列のみで良好な収束 (`REAC_ITER = 1`)
- 4つの追加内部変数:

$$-\frac{\mathbf{D}_{21}^n}{D_{22}} \quad \Delta \varepsilon_{zz}^n - \frac{\sigma_{zz}^n}{D_{22}} + \frac{\mathbf{D}_{21}^n}{D_{22}} \Delta \hat{\varepsilon}^n$$

- 全体平衡の上での収束が、平面応力状態の収束より速い場合は遅くなる

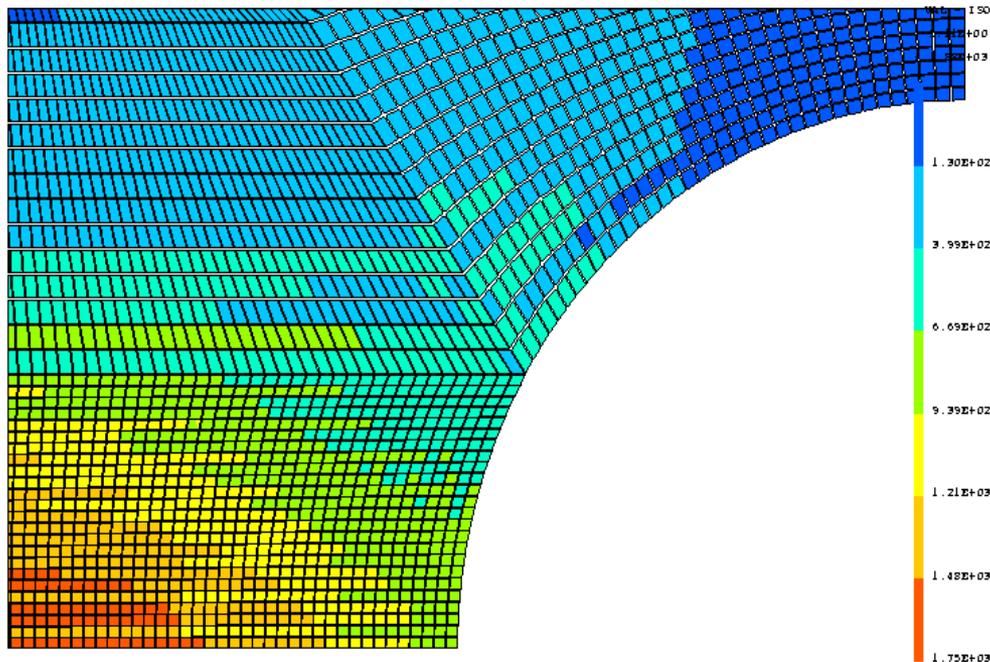
■ 変形(修正されたアプローチ):

- $\sigma_{zz} <$ 全体系の平衡状態だけでなく各ニュートン反復における許容誤差
- 困難な計算を収束させられる(軟化する構成則など)
- `ITER_MAXI_DEBORST > 1` と設定(ヒント: `ITER_MAXI_DEBORST=>5`)

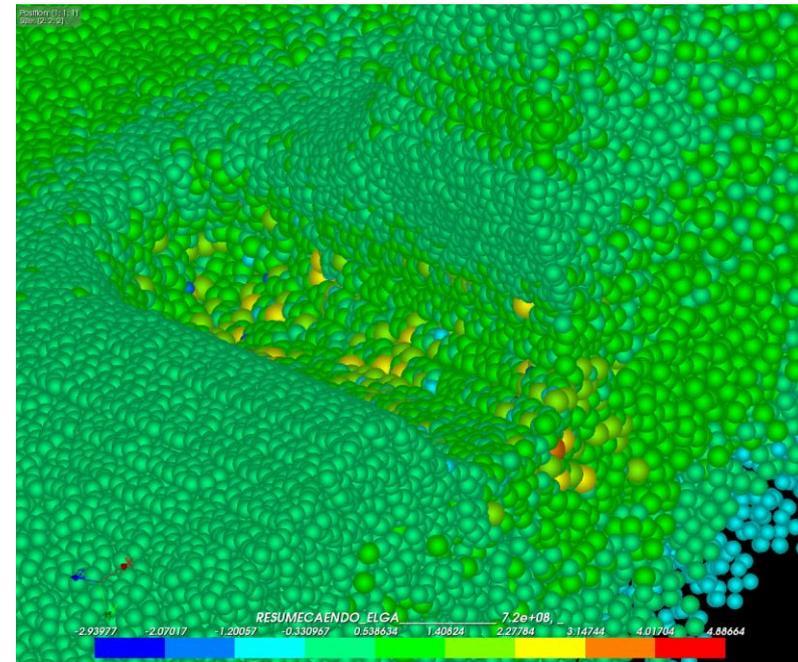
準非圧縮性

▶ 高レベルに進行した塑性(全面塑性状態)

- 体積が一定となる塑性流動は非圧縮性を意味する
- 数値的に生じること
 - 硬すぎる挙動
 - 応力が振動する可能性(テンソルのトレース)



切欠き試験片: σ_{yy}



バルブのリップ底の浸食:

$$Tr(\sigma) / \sigma_{eq}$$

準非圧縮性

▶ 高レベルに進行した塑性(全面塑性状態)

- 体積が一定となる塑性流動は非圧縮性を意味する
- 数値的に生じること
 - 硬すぎる挙動
 - 応力が振動する可能性(テンソルのトレース)
- 2つの解法
 - 低減積分
 - 準非圧縮性モデル

▶ 低減積分

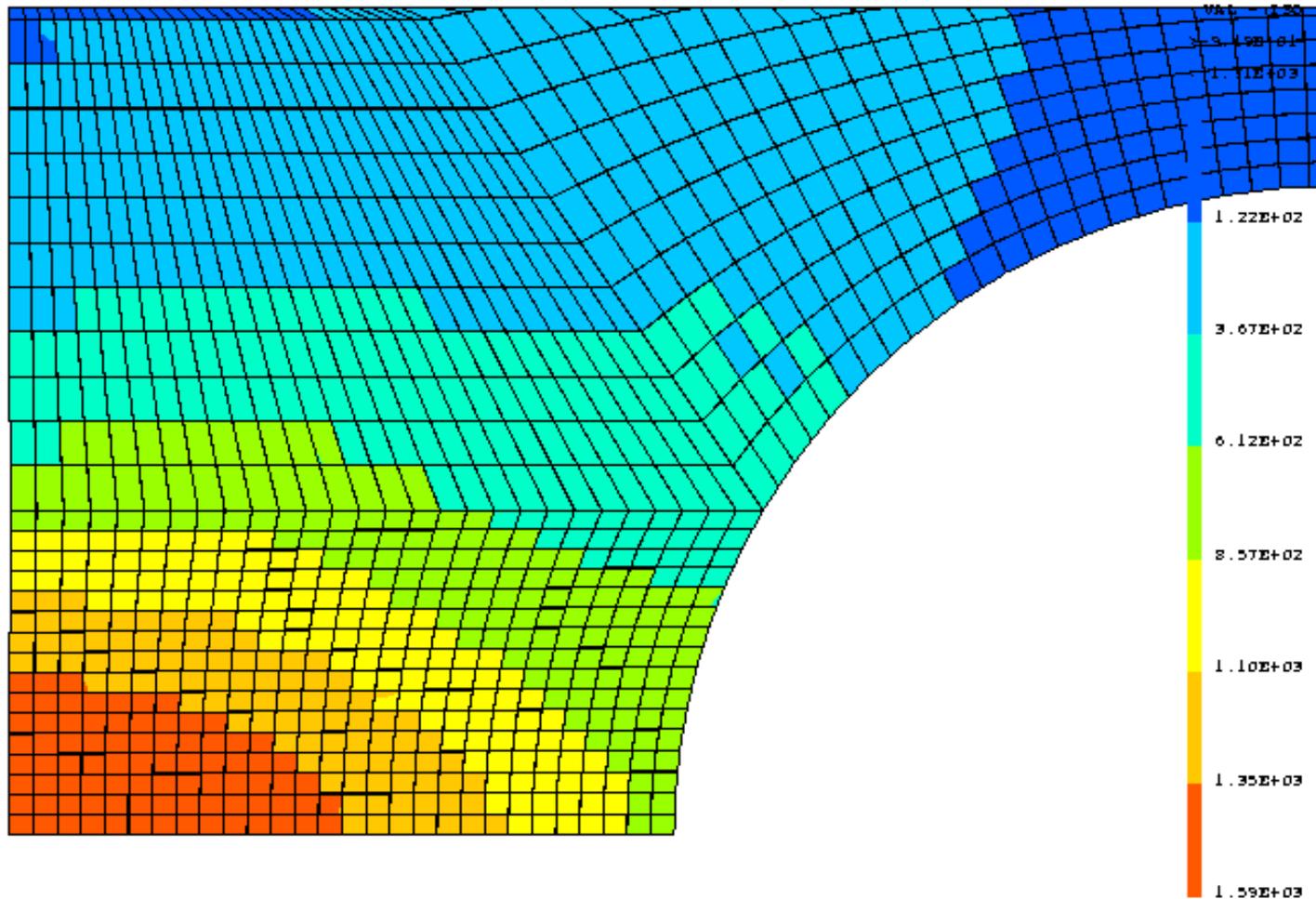
- 数値積分(ガウス積分):

$$\int_{\Omega_e} f(x) d\Omega = \sum_{i=1}^{npg} f(\xi_i) \omega_i$$

- `AFFE_MODELE` の中で低減積分を含む有限要素法を選択: `3D_SI`, `AXIS_SI`, `D_PLAN_SI`, `C_PLAN_SI`

2次元:	QUAD8	9点に替えて4ガウス点
3次元:	HEXA20	27点に替えて8ガウス点

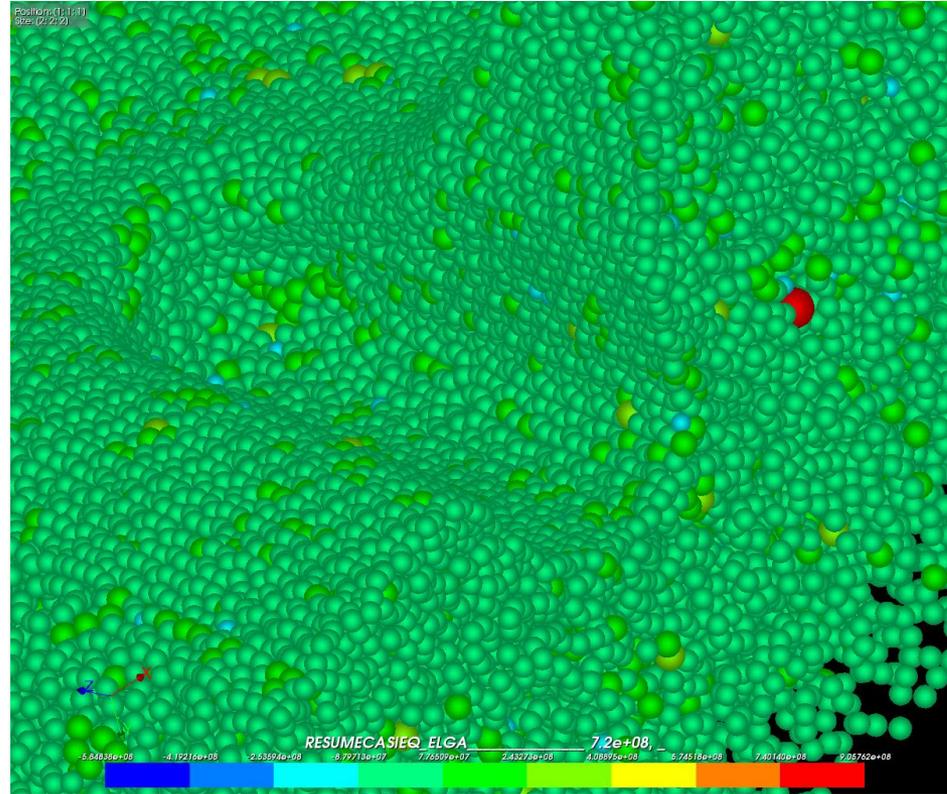
準非圧縮性



切欠き試験片：低減積分

σ_{yy} の振動なし

準非圧縮性



3D_SI モデル化を用いたバルブのリブ底の浸食 : $Tr(\sigma)$

低減積分だけでは十分でない場合は,

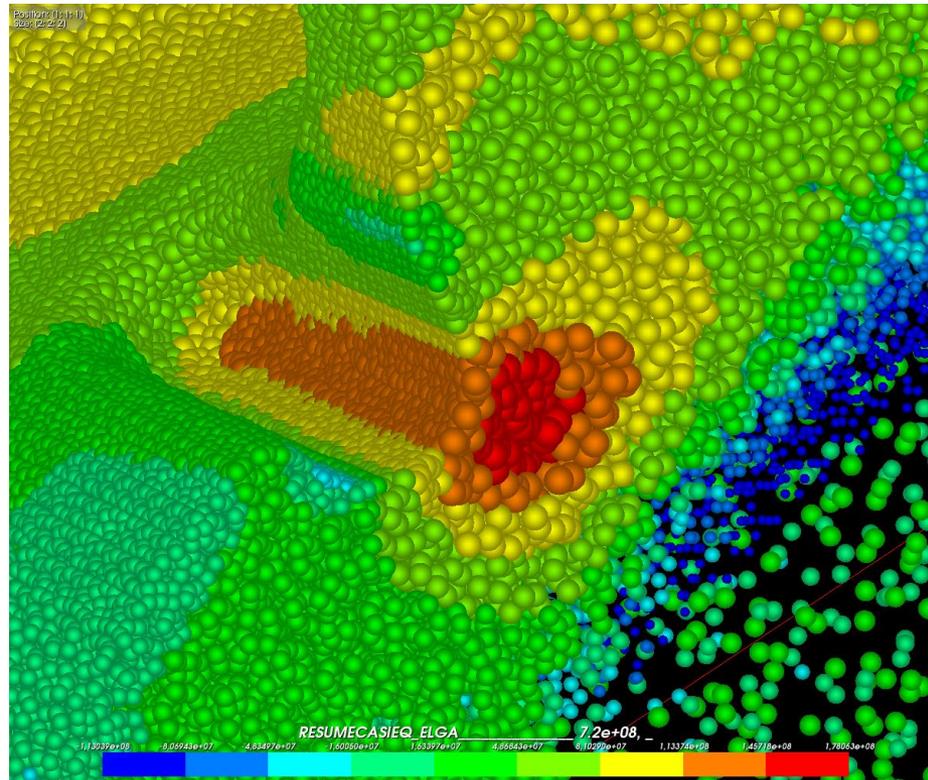
準非圧縮性

▶ 準非圧縮性処方

- 3つの場の混合による方法:
 - 場: 変位, 体積ひずみ, 関連するラグランジュ乗数 (非圧縮性の場合の圧力に相当)
 - `AFFE_MODELE` での選択: `3D_INCO`, `AXIS_INCO`, `D_PLAN_INCO`
 - 備考:
 - 大変効果的であるが, 少し時間がかかる。
 - 2次要素のみ
 - 非正定値マトリックスが導かれる: MUMPSが望ましい
 - 大変形: `*_INCO_GD` (`DEFORMATION = 'SIMO_MIEHE'` の場合)
- 2つの場の混合による方法:
 - 場: 変位, 圧力
 - `AFFE_MODELE` での選択: `*_INCO_UP`
 - 備考:
 - 3つの場の方法よりも低コスト
 - セル: `TETRA4` (おおよそ P1+/P1) or 2次セル (P2/P1)
 - 微小変形に限定

STA11.2の中の
より多くの処方

準非圧縮性



3D_INCO モデルによるバルブのリブ底の浸食: $Tr(\sigma)$

微小変形モデル

▶ DEFORMATION = 'PETIT'

- HPP (微小摂動の仮定 (フランス語の略語))
- すべては小さい! Lagrangeの記述 = Eulerの記述

▶ DEFORMATION = 'GROT_GDEP'

- 大変形と大回転
- Green-Lagrangeひずみ \leftrightarrow 初期時のPiola-Kirchhoff 応力
- 純粋な超弾性媒体 (線形または非線形弾性. ゴム)
- hpp: 他のすべての挙動 + 大変形と大回転

▶ DEFORMATION = 'PETIT_REAC'

- 大ひずみの近似
- 各反復で形状更新を伴う微小ひずみ: 2次の項を無視
- 総変形量 = 異なる形状に対する線形ひずみの合計に基づく. 物理的意味は不明
- 応力: 単純な時間導出 => **客観的ではない**. すなわち構造の剛性回転不変性 => **PETIT_REAC** は、大回転に適していない。
- 非常に小さい時間増分, 準ラジアル荷重, 塑性変形に比べて弾性変形が小さい場合に有効
- 接線剛性に形状変化が寄与しない

微小変形モデル

▶ DEFORMATION = 'SIMO_MIEHE'

- 大変形の包括的なアプローチ
- 弾性変形は、現在の形状(変形後)に対して定義される
- 塑性変形は初期形状に対して定義される
- incrementally objectiveなモデル: 大回転がある場合でも正確な解が得られる, ロバストで2次の収束
- 特別に適合した構成則を要する: (粘)弾塑性・等方硬化、von Mises, Rousselier

▶ DEFORMATION = 'GDEF_HYPO_ELAS'

- 大変形に対して(ほぼ)汎用的
- Simo & Hughesによれば, objective local frameを伴うアルゴリズム
- incrementally objectiveなモデル: 大回転がある場合でも正確な解が得られる
- 等方弾性なすべての(粘)弾塑性構成則に適用可能
- 収束が効率的でない(接線行列)

▶ DEFORMATION = 'GDEF_LOG'

- 大変形の別のアプローチ: 対数変形(Miehe & Apel)
- すべてのHPP則で使用できる(移動硬化, 異方性, C_PLAN ...)
- SIMO_MIEHE よりもCPU時間がかかる

むすび

▶ 参考資料

- 使用方法
 - U4.51.11: 非線形挙動の統合
 - U4.43.01: `DEFI_MATERIAU` コマンドの文法
- 参考
 - R5.03.02: 等方性硬化または線形移動硬化の統合
 - R5.03.03: 平面応力の考慮
 - R5.03.XX: 他の挙動の統合
 - R5.03.14: 非線形構成則の統合 (陰解法と陽解法)
 - R5.03.03: 非線形挙動における平面応力の仮説
 - R3.06.08: 準非圧縮性を扱う有限要素
 - R5.03.21: 大ひずみでの等方硬化を伴う(粘)弾塑性モデル (`SIMO_MIEHE`)
 - R5.03.22: 大回転と微小変形における構成則 (`GROT_GDEP`)
 - R5.03.24: 大変形モデル `GDEF_LOG` と `GDEF_HYPO_ELAS`

むすび

◆ 挙動の局所分解の目的

- 接線剛性マトリックス

- インクリメントのはじめに `RIGI_MECA_TANG` $K_i^0 = K_{i-1}$
- 実挙動に近い反復中の `FULL_MECA` K_i^n

- 時間ステップ <<+>> での応力

- (離散化された問題の $\varepsilon(\Delta u)$ の各評価に対して) 等方硬化または線形移動硬化における正確な解
- 他の挙動(または古典的な平面応力)の反復プロセス
- インクリメントの大きさへの依存性
- `RESI_INTE_RELA` と `ITER_INTE_MAXI` を調整

$$\begin{cases} \sigma_{i-1}, \alpha_{i-1} \\ \varepsilon(\Delta u_i^n) \end{cases} \rightarrow \sigma_i^n, \alpha_i^n$$

End of presentation

Is something missing or unclear in this document?
Or feeling happy to have read such a clear tutorial?

Please, we welcome any feedbacks about *Code_Aster* training materials.
Do not hesitate to share with us your comments on the *Code_Aster* forum [dedicated thread](#).