

# オープンソース流体解析ソルバーを活用した固有直交分解法の 配管系流れ解析への適用

矢敷達朗<sup>1†</sup> 橋本学<sup>2</sup> 奥田洋司<sup>2</sup>

<sup>1</sup>(株)日立製作所 <sup>2</sup>東京大学 新領域創成科学研究科

## Application of proper orthogonal decomposition method utilizing open source fluid analysis solver to piping fluid analysis

Tatsuro YASHIKI<sup>†</sup> Gaku HASHIMOTO<sup>\*\*</sup> Hiroshi OKUDA<sup>\*\*</sup>

<sup>\*</sup> Hitachi, Ltd. <sup>\*\*</sup> Univ. Tokyo

### Abstract

We are aiming to apply proper orthogonal decomposition (POD) and Galerkin Projection to piping fluid analysis for the purpose of shortening the calculation time of three dimensional fluid analysis for piping systems. In this paper, in order to verify the effect of application of POD on the result of three-dimensional fluid analysis, POD was applied to the cavity flow and the straight pipe swirl flow.

**Keywords:** POD, Galerkin Projection, 3D fluid analysis, Piping system, OpenFOAM

## 1. はじめに

発電、石油化学、水、医薬などの産業プラントでは、配管減肉等のプラントの劣化状況を可視化することで、プラントの寿命を予測し、運転・保守の計画に活用したいという要望が拡大している。プラントの劣化状況を可視化するために、3次元流体解析により配管内の流動状態を計算し、計算で得られた流動状態から配管の減肉速度を評価するアプローチが提案されている[1]。配管内流動状態の計算においては、配管系統内のオリフィス、エルボ、分岐等で生じる剥離流れ、旋回流れを捉える必要があり、配管系を対象とした3次元流体解析が必須となる。配管系を対象とした3次元流体解析では解析規模が大きくなるため、計算時間の短縮が求められる。

計算時間を短縮する手段として、3次元流体解析結果に対して流れ場の情報を欠落することなく縮約モデル(ROM: Reduced Order Model)を導出し、縮約モデルを用いて短時間に流れ場を計算するアプローチが注目されている[2]。本アプローチでは、固有直交分解(POD: Proper Orthogonal Decomposition)により、大規模な高次元のデータである3次元流体解析結果から低次元の基底空間を抽出し、Galerkin Projectionにより、基底空間に流体の基礎式を射影してROMを構築する[2, 3]。3次元流体解析にPOD及びGalerkin Projectionを適用した従来の取り組みとしては、気象計算での活用を目的として円柱周りの層流れに適用した事例、車体等の鈍頭物体周りの乱流流れに適用した事例等が報告されている[4, 5]。本研究では、配管系を対象とした3次元流体解析の計算時間を短縮することを目的として、POD及びGalerkin Projectionを配管系流れ解析に適用する。このうち、本発表ではオープンソース流体解析ソルバーとしてOpenFOAMを活用し、PODをキャビティ流れ、直管旋回流れに適用した結果について報告する[6]。

## 2. ROMの構築方法

本章では、図1の流れに沿ってROMの構築方法を説明する。

### [Step1]

配管系の形状情報、プラント運転条件を入力として、OpenFOAMを用いて詳細3次元流体解析を実施し、配管内部の高次元の流れ場を算出する。なお、本研究では、流体解析は非圧縮性流れを対象とする。

<sup>†</sup> tatsuro.yashiki.zn@hitachi.com

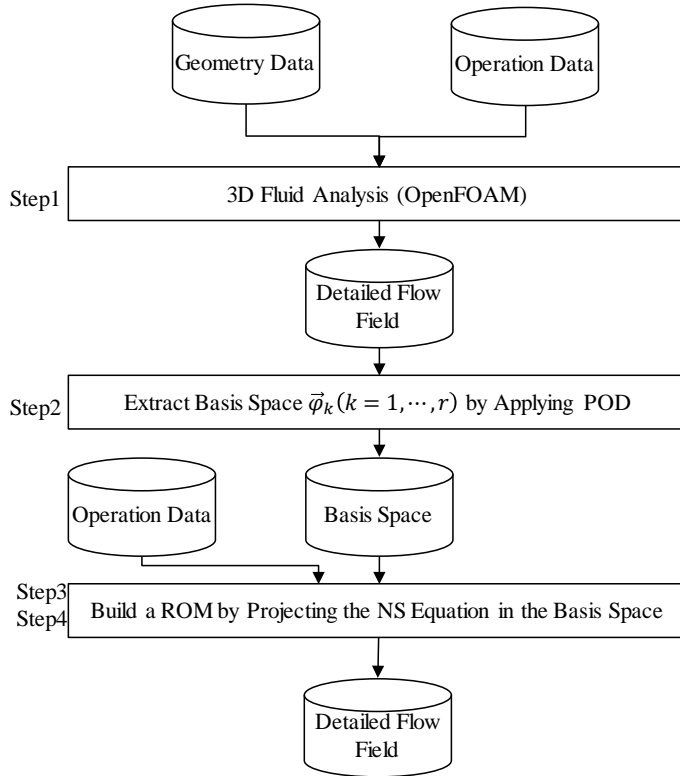
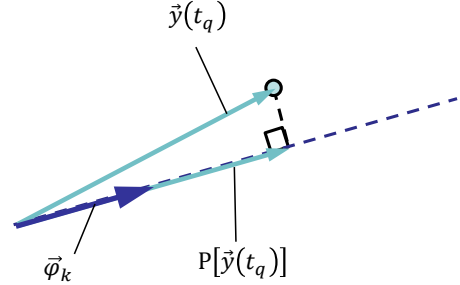


Fig. 1 Flow of ROM construction

Fig. 2 Basis  $\vec{\varphi}_k$ , Time Series Data  $\vec{y}(t_q)$  and Projection Vector  $P[\vec{y}(t_q)]$  in N-Dimensional Parameter Space

## [Step2]

[Step1]で算出した高次元の流れ場に対して POD を適用し、低次元の基底空間を抽出する。3次元流体解析における流れ場の計算点数を $n$ とすると、PODにより、 $n$ 次元のデータから情報の欠落が最少となるように $r$ 次元の基底空間が抽出される。配管系流れ解析では、 $n$ が $10^6 \sim 10^7$ のオーダーであるのに対して、 $r$ は $n$ よりも十分小さい値( $10^1 \sim 10^2$ 程度)となる。

## [Step3]

3次元流体解析の基礎式である NS(Navier Stokes)方程式を満足する流れ場 $\vec{u}$ が、[Step2]で求めた基底 $\vec{\varphi}_k$ の線形結合で表されると仮定する。

$$\vec{u} = \sum_{k=1}^r a_k \vec{\varphi}_k \quad (2-1)$$

ここで、 $a_k$ は未知の結合係数である。Galerkin Projection を適用し、NS 方程式を基底空間に射影して(2-1)式中の $a_k$ に関する方程式を導出し、直接 NS 方程式を解く代わりに $a_k$ に関する方程式を解くことで流れ場を計算する。NS 方程式において解くべき未知数の数は $10^6 \sim 10^7$ のオーダーであるのに対して、 $a_k$ の数は $r$ と同様に $n$ よりも十分小さい値であり、短時間に流れ場を計算することが可能となる。

## [Step4]

一度、基底空間を抽出した後は、異なるプラント運転条件に対して3次元流体解析を再度実施する必要はなく、代わりに結合係数 $a_k$ を計算し直すことにより流れ場を計算できる。

### 3. POD 概要

#### 3. 1 基底 $\vec{\varphi}_k$ の計算方法

本章では2章で説明した ROM の構築方法のうち、[Step2]で用いる POD の概要を説明する[2]。3次元流体解析が出力する時系列データ $\vec{y}^*(t_q)$ を(3-1)式に示すように時間平均成分 $\vec{y}$ と時間変動成分 $\vec{y}(t_q)$ に分解する。

$$\vec{y}^*(t_q) = \vec{y} + \vec{y}(t_q) \quad (3-1)$$

ここで $t_q$ は時間ステップ $q(1, \dots, m)$ における時刻である。POD の対象となるのは時間変動成分 $\vec{y}(t_q)$ であり、以下では $\vec{y}(t_q)$ を対象として説明する。 $\vec{y}(t_q)$ は時間方向の次元が $m$ 、空間方向の次元が $n$ となる時系列データである。基底 $\vec{\varphi}_k$ は $n$ 次元のパラメータ空間上で定義され、図2に示すようにパラメータ空間上にマッピングした $\vec{y}(t_q)$ と、 $\vec{y}(t_q)$ を $\vec{\varphi}_k$ に射影したベクトル $P[\vec{y}(t_q)]$ の差異が最少となる条件より $\vec{\varphi}_k$ を算出する。ここで、 $\vec{\varphi}_k$ への射影 $P[\vec{y}(t_q)]$ は(3-2)式で表される。

$$P[\vec{y}(t_q)] = [\vec{\varphi}_k^T \cdot \vec{y}(t_q)] \vec{\varphi}_k \quad (3-2)$$

上で述べた $\vec{\varphi}_k$ の算出条件は、数学的には(3-3)式と(3-4)式で定義される最大化問題の解として求めることと等価である。

$$\vec{\varphi}_k = \arg \max_{\vec{\varphi}_k} \sum_{q=1}^m [\vec{\varphi}_k^T \cdot \vec{y}(t_q)]^2 \quad (3-3)$$

$$\vec{\varphi}_k^T \cdot \vec{\varphi}_k = 1 \quad (3-4)$$

(3-4)式はパラメータ空間上で $\vec{\varphi}_k$ が単位ベクトルとなることを意味している。ここで、 $\vec{y}(t_q)$ の空間成分を行方向、時間成分を列方向に展開し、(3-5)式に示す行列形式で表現する。

$$Y \equiv \begin{bmatrix} y_1(t_1) & \cdots & y_1(t_m) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_n(t_1) & \cdots & y_n(t_m) \end{bmatrix} = [y_{pq}] \in \mathbb{R}^{n \times m} \quad (3-5)$$

(3-5)式を(3-3)式に代入して、

$$\vec{\varphi}_k = \arg \max_{\vec{\varphi}_k} \vec{\varphi}_k^T R \vec{\varphi}_k \quad (3-6)$$

$$R \equiv YY^T \quad (3-7)$$

(3-7)式で定義される $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ は $\vec{y}(t_q)$ に対する共分散行列である。(3-7)式と(3-4)式の最大化問題の解 $\vec{\varphi}_k$ は、(3-8)式に示す共分散行列 $R$ の固有ベクトルと固有値を求めることで得られる。

$$R \vec{\varphi}_k = \lambda_k \vec{\varphi}_k \quad (3-8)$$

(3-8)式中の $R$ はゼロ要素を含まないサイズ $n \times n$ の密行列である。 $n$ は $10^6 \sim 10^7$ のオーダーとなるため、 $\vec{\varphi}_k$ を計算するためにサイズ $10^7 \times 10^7$ の密行列に対する固有値問題を解くこととなり、計算に莫大な時間が必要となる。本研究では、この課題を解決するために SnapshotPOD を適用する[7]。SnapshotPOD では、(3-8)式の代わりに、(3-9)式の固有値問題を解き、(3-10)式より $\vec{\varphi}_k$ を計算する。

$$Y^T Y \vec{v}_k = \lambda_k \vec{v}_k \quad (3-9)$$

$$\vec{\varphi}_k = Y \vec{v}_k / \sqrt{\lambda_k} \quad (3-10)$$

(3-10)式中の $Y^T Y$ はサイズ $m \times m$ の密行列である。ここで $m$ は時系列データ $\vec{y}(t_q)$ の時間方向の次元であり、 $10^2 \sim 10^3$ のオーダーとなるため、少ない計算負荷で $\vec{\varphi}_k$ を計算できる。

### 3. 2 基底空間の抽出方法

(3-2)式より、 $\vec{y}(t_q)$ の基底 $\vec{\varphi}_k$ への射影成分の二乗和は(3-11)式で表される。

$$\sum_{q=1}^m \|P[\vec{y}(t_q)]\|^2 = \sum_{q=1}^m [\vec{\varphi}_k^T \cdot \vec{y}(t_q)]^2 \quad (3-11)$$

(3-4)式、(3-8)式を(3-11)式の右辺に代入して変形すると、以下の関係式を得る。

$$\sum_{q=1}^m [\vec{\varphi}_k^T \cdot \vec{y}(t_q)]^2 = \lambda_k \quad (3-12)$$

(3-14)式より $\vec{y}(t_q)$ の基底 $\vec{\varphi}_k$ への射影成分の二乗和は固有値 $\lambda_k$ に等しい。 $\vec{y}(t_q)$ を流れ場とすると、 $\sum_{q=1}^m \vec{\varphi}_k^T \cdot \vec{y}(t_q)$ は流れ場の基底方向への射影成分の総和となるので、(3-12)式は流れ場のエネルギーを基底方向に射影したものの総和とみなすことができる。 $R$ の固有ベクトルを固有値の大きい順に並べ替えたものとする、(3-13)式は1から $r$ までの基底 $\vec{\varphi}_k$ で定義される基底空間が流れ場のエネルギーをどれほど捉えているかを示す。

$$\sum_{k=1}^r \sum_{q=1}^m [\vec{\varphi}_k^T \cdot \vec{y}(t_q)]^2 = \sum_{k=1}^r \lambda_k \quad (3-13)$$

基底空間に射影した流れ場のエネルギーがもともとの流れ場のエネルギーに等しいならば、流れ場のエネルギーを欠落することなく基底空間を抽出できていると考えられることより、(3-14)式の関係式を満足するように基底空間の次元数 $r$ を決定する。

$$\sum_{k=1}^r \lambda_k / \sum_{k=1}^n \lambda_k \approx 1 \quad (3-14)$$

#### 4. POD の適用結果

3次元流体解析結果に対する POD 適用の効果を検証するために、①キャビティ流れ、②配管系として直管を対象に直管旋回流れに対して POD を適用した。以下では、各流れに対する適用結果について説明する。

##### 4. 1 キャビティ流れへの適用結果

計算条件を表 1 に示す。流体ソルバーとしては、オープンソースの 3 次元流体解析ソルバーである OpenFOAM を用いた[6]。また、計算格子として $x, y, z$ 方向にそれぞれ1000,1000,1に均等分割した格子を用いた。さらに、レイノルズ数(Re)は $10^5$ とし、乱流モデルとして渦粘性モデルである SST- $k\omega$  モデルを用いた[8]。解析時間は 100(s)として 0.1(s)間隔で時系列データを出力し、時系列データのうち流れ場に対して POD を適用した。本計算では、PODの適応対象である流れ場の空間方向データサイズ $n$ は $1000 \times 1000 \times 1 \times 2 = 2 \times 10^6$ であり、時間方向データサイズ $m$ は1000である。

キャビティ流れ計算結果に対して、(3-10)式より求まる固有値 $\lambda_k$ を(4-1)式にて規格化し、値が大きい順にプロットした結果を図 3 に示す。

$$\bar{\lambda}_k = \lambda_k / \sum_{k=1}^{1000} \lambda_k \quad (4-1)$$

(4-1)式において、右辺分子項は $\lambda_k$ に対応する基底 $\vec{\varphi}_k$ が保有している流れ場のエネルギーを表しており、右辺分母項はもともとの流れ場が保有している全エネルギーを表している。従って、規格化固有値 $\bar{\lambda}_k$ は、もともとの流れ場が保有しているエネルギーに対して、 $\bar{\lambda}_k$ に対応する基底 $\vec{\varphi}_k$ が保有しているエネルギーの割合を示す値である。基底 $\vec{\varphi}_k$ のインデックス $k$ が大きくなると、 $\bar{\lambda}_k$ は急激に減少し、基底 $\vec{\varphi}_k$ が保有しているエネルギーの割合も急激に減少する結果となった。

表 2 に、基底の数 $r$ に対する規格化固有値の累積総和 $S_r = \sum_{k=1}^r \lambda_k$ を示す。 $S_r$ は、もともとの流れ場が保有しているエネルギーに対して、 $r$ 次元の基底空間が保有しているエネルギーの割合を示す値である。 $r = 25$ において $S_r$ は 0.999 を超えていることから、基底の数を 25 とし 25 次元の基底空間を抽出すると、もともとの流れ場が保有しているエネルギーの 99.9%を捉えることが可能であることを確認した。

次に、(4-2)式に示すように、もともとの流れ場 $\vec{u}(t)$ を $r$ 次元の基底空間における基底の線形結合で定義される流れ場 $\vec{u}_{POD}(t)$ により近似した。

$$\vec{u}(t) \approx \vec{u}_{POD}(t) = \vec{u} + \sum_{k=1}^r a_k(t) \vec{\varphi}_k \quad (4-2)$$

(4-2)式中の結合係数 $a_k$ は、(3-4)式、および $\vec{\varphi}_k$ が互いに直交する条件から導出される(4-3)式より計算した。

Table1 Calculation Condition of Cavity Flow

| Item                               | Condition                     |
|------------------------------------|-------------------------------|
| Fluid Solver                       | OpenFOAM                      |
| Computational Grid                 | 1000 × 1000 × 1(Uniform Grid) |
| Reynolds Number(Re)                | $10^5$                        |
| Turbulence Model                   | SST- $k\omega$                |
| Analysis Time                      | 100[s]                        |
| Output Interval of Analysis Result | 0.1[s]                        |

Table2 Cumulative Total of Normalized Eigenvalues

| $N_b[-]$ | $S_r[-]$ | $N_b[-]$ | $S_r[-]$ | $N_b[-]$ | $S_r[-]$ |
|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 1        | 0.8336   | 11       | 0.9919   | 21       | 0.9984   |
| 2        | 0.8963   | 12       | 0.9933   | 22       | 0.9985   |
| 3        | 0.9454   | 13       | 0.9944   | 23       | 0.9987   |
| 4        | 0.9588   | 14       | 0.9953   | 24       | 0.9989   |
| 5        | 0.9704   | 15       | 0.9960   | 25       | 0.9990   |
| 6        | 0.9769   | 16       | 0.9966   | 26       | 0.9991   |
| 7        | 0.9812   | 17       | 0.9971   | 27       | 0.9992   |
| 8        | 0.9852   | 18       | 0.9975   | 28       | 0.9993   |
| 9        | 0.9881   | 19       | 0.9978   | 29       | 0.9994   |
| 10       | 0.9902   | 20       | 0.9981   | 30       | 0.9995   |

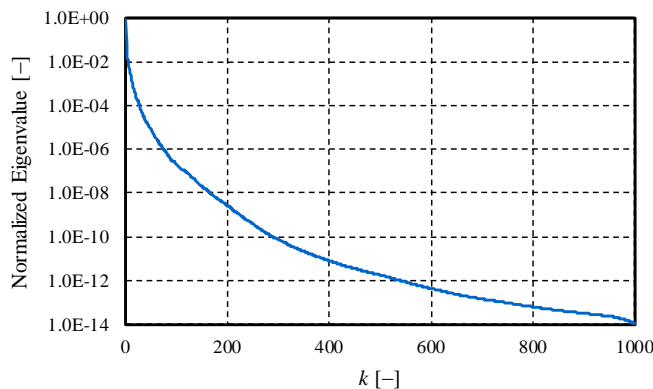


Fig. 3 Normalized Eigenvalue

$N_b$ : Number of Bases

$S_r$ : Cumulative Total of Normalized Eigenvalues

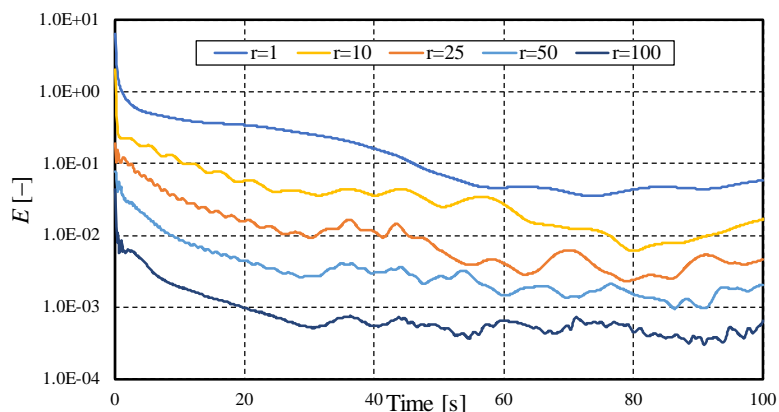


Fig. 4 Time Transition of Error

Table3 Time Average of Error and Cumulative Total of Normalized Eigenvalues

| Number of Bases [-] | Time Average of Error[-] | Cumulative Total of Normalized Eigenvalues[-] |
|---------------------|--------------------------|---|
| 1                   | 0.1938                   | 0.8336  |
| 10                  | 0.0480                   | 0.9902  |
| 25                  | 0.0147                   | 0.9990  |
| 50                  | 0.0046                   | 0.9999  |
| 100                 | 0.0010                   | 1.0000  |

$$a_k(t) = \vec{\varphi}_k \cdot (\vec{u}(t) - \vec{u}) \quad (4-3)$$

基底空間の次元数 $r$ を1,10,25,50,100とした場合を対象として、もともとの流れ場 $\vec{u}(t)$ と近似流れ場 $\vec{u}_{POD}(t)$ の誤差 $E(t)$ の時間変化を図4に示す。また、表3に $E(t)$ の時間平均値と規格化固有値の累積総和を示す。ここで、 $E(t)$ は(4-4)式より算出した。

$$E(t) \equiv \frac{\sqrt{\|\vec{u}_{POD}(t) - \vec{u}(t)\|^2}}{\sqrt{\|\vec{u}(t)\|^2}} \quad (4-4)$$

(4-4)式の右辺分子項は $\vec{u}(t)$ と $\vec{u}_{POD}(t)$ の差の絶対値(L2 ノルム)であり、右辺分母項は $\vec{u}(t)$ の絶対値である。図4より、基底空間の次元数 $r$ が増えるに従い全時間領域において誤差 $E(t)$ は減少した。また、いずれの $r$ に対しても、0(s)~40(s)の時間領域において誤差 $E(t)$ は次第に減少し、40(s)以降は一定のレベルとなった。本計算では、初期条件として全領域に流速ゼロの条件を与えているため、0(s)~40(s)では流れが次第に発達し、40(s)以降で流れは準定常状態となる。0(s)~40(s)は非定常性の強い流れであるため、この時間領域で $E(t)$ のレベルが大きく、流れが準定常状態に漸近するに伴い $E(t)$ は次第に減少し、準定常状態に到達した40(s)以降で $E(t)$ は一定のレベルになったと考えられる。表3より、基底空間の次元数 $r$ が増えるに従いに $E(t)$ の時間平均値は減少し、規格化固有値の累積総和は増大した。累積総和が0.999を超える $r=25$ の条件に対して、 $E(t)$ 時間平均値は0.015となった。これより、PODにより抽出した25個の基底(25次元の基底空間)を用いて、もともとの流れ場が保有しているエネルギーの99.9%を捉えることができ、基底の線形結合により流れ場を時間平均誤差1.5%で近似できることを確認した。

#### 4. 2 直管旋回流れへの適用結果

配管系流れ解析へのPOD適用のための基礎検討として、直管旋回流れに対してPODを適用した。計算対象は図5に示す長さ9.5[m]、内径0.1545[m]の直管である。流速境界条件として、流入境界面に直管旋回流れの実験結果に基づく流速分布を与え、流出境界面に流速勾配ゼロ、壁面に流速ゼロの条件を与えた[9]。また、圧力境界条件として、流出境界面に圧力固定の条件を与え、それ以外の境界面に圧力勾配ゼロの条件を与えた。

計算条件を表4に示す。流体ソルバーとしてはOpenFOAMを用い、計算格子として格子分割数576000の格子を用いた。Reは実験結果と同じ条件である $10^5$ とし、乱流モデルとしてはレイノルズ応力輸送モデルであるSSGモデルを用いた[10]。解析時間は100(s)として0.1(s)間隔の時系列データを出力し、時系列データのうち流れ場に対してPODを適用した。本計算では、PODの適応対象である流れ場の空間方向データサイズ $n$ は $576000 \times 3 = 1.7 \times 10^6$ であり、時間方向データサイズ $m$ は1000である。

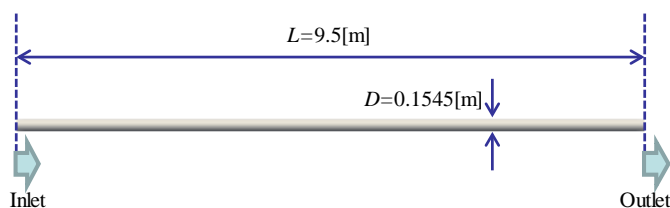


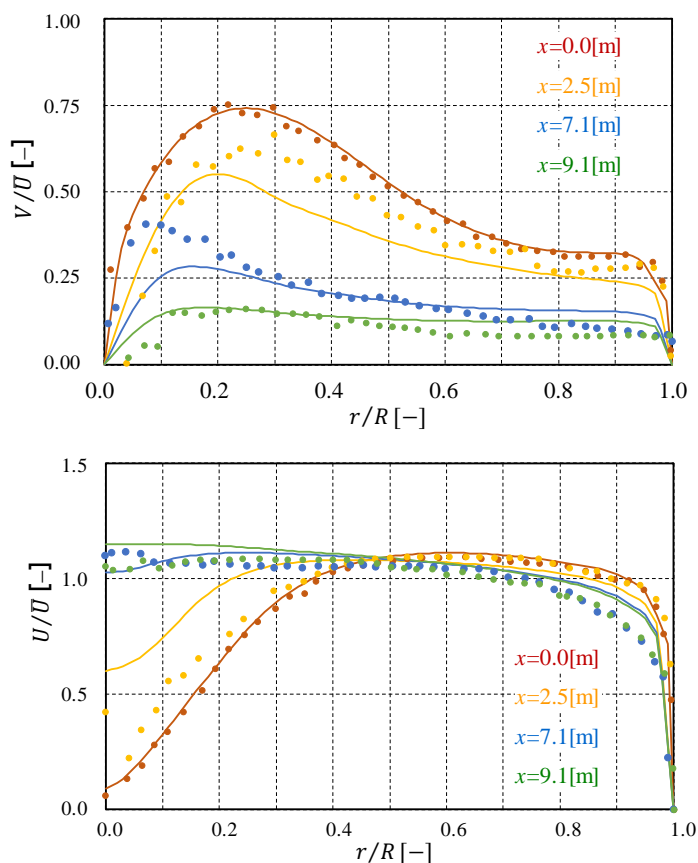
Fig. 5 Calculation Area of Straight Pipe Swirl Flow

Table4 Calculation Condition of Straight Pipe Swirl Flow

| Item                               | Condition |
|------------------------------------|-----------|
| Fluid Solver                       | OpenFOAM  |
| Computational Grid                 | 576000    |
| Reynolds Number(Re)                | $10^5$    |
| Turbulence Model                   | SSG       |
| Analysis Time                      | 100[s]    |
| Output Interval of Analysis Result | 0.1[s]    |

図 6 に 3 次元流体解析結果の軸速度・旋回速度の半径方向分布を実験結果と比較した結果を示す。比較したのは、直管入口から 2.5m, 7.1m, 9.1m 下流における軸速度・旋回速度の半径方向分布である。グラフ横軸の値は半径位置を配管半径で規格化したものであり、左端は配管中心、右端は配管壁面となる。また、グラフ縦軸の値は軸速度・旋回速度を軸平均速度で規格化している。図 6 より、本計算は実験値と良好に一致し、計算結果が妥当であることを確認した。

図 7 に規格化固有値 $\bar{\lambda}_k$ を値が大きい順にプロットした結果を示す。また、表 5 に、基底の数 $r$ に対する規格化固有値の累積総和 $S_r$ を示す。キャビティー流れと同様に基底 $\bar{\phi}_k$ のインデックス $k$ が大きくなると、 $\bar{\lambda}_k$ は急激に減少し、基底 $\bar{\phi}_k$ が保有しているエネルギーの割合も急激に減少する結果となった。また、 $r = 27$ において $S_r$ は 0.999 を超えていることから、基底の数を 27 とし 27 次元の基底空間を抽出すると、もともとの流れ場が保有しているエネルギーの 99.9%を捉えることが可能であることを確認した。



$U$  : Axial Flow Velocity[m/s]  
 $V$  : Angular Flow Velocity[m/s]  
 $\bar{U}$  : Representative Flow Velocity [m/s]  
 $r$  : Radial Position[m]  
 $x$  : Axial Position[m]  
 $R$  : Piping Inner Diameter [m]  
 ○ Experimental Value — Calculated Value

Fig.6 Comparison between Experimental Value and Calculated Value



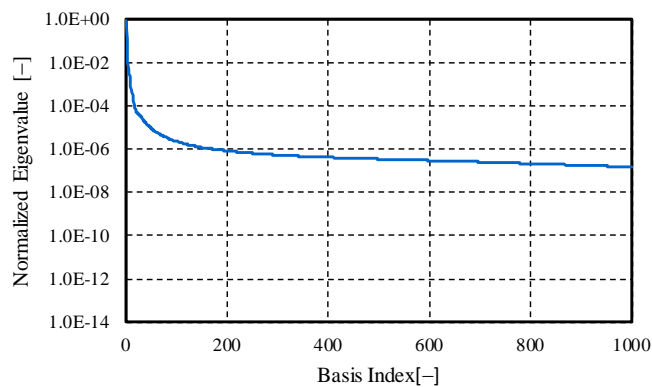


Fig. 7 Normalized Eigenvalue

Table5 Cumulative Total of Normalized Eigenvalues

| $N_b[-]$ | $S_r[-]$ | $N_b[-]$ | $S_r[-]$ | $N_b[-]$ | $S_r[-]$ |
|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 1        | 0.8320   | 11       | 0.9971   | 21       | 0.9987   |
| 2        | 0.9467   | 12       | 0.9976   | 22       | 0.9988   |
| 3        | 0.9741   | 13       | 0.9979   | 23       | 0.9988   |
| 4        | 0.9836   | 14       | 0.9981   | 24       | 0.9989   |
| 5        | 0.9886   | 15       | 0.9983   | 25       | 0.9989   |
| 6        | 0.9917   | 16       | 0.9984   | 26       | 0.9989   |
| 7        | 0.9939   | 17       | 0.9985   | 27       | 0.9990   |
| 8        | 0.9954   | 18       | 0.9985   | 28       | 0.9990   |
| 9        | 0.9962   | 19       | 0.9986   | 29       | 0.9990   |
| 10       | 0.9967   | 20       | 0.9987   | 30       | 0.9991   |

 $N_b$ : Number of Bases $S_r$ : Cumulative Total of Normalized Eigenvalues

## 5. 結論

配管系を対象とした 3 次元流体解析の計算時間を短縮することを目的として, POD 及び Galerkin Projection の配管系流れ解析への適用を目指している. 本発表では, 3 次元流体解析結果に対する POD 適用の効果を検証するために, POD をキャビティー流れ, 直管旋回流れに適用し以下の結論を得た.

- [1] キャビティー流れに対して, POD により抽出した 25 個の基底を用いて, もともとの流れ場が保有しているエネルギーの 99.9%を捉えることができ, 基底の線形結合により流れ場を時間平均誤差 1.5%で近似できることを確認した.
- [2] 直管旋回流れに対して, POD により抽出した 27 個の基底を用いて, もともとの流れ場が保有しているエネルギーの 99.9%を捉えることができることを確認した.

## 参考文献

- [1] 浜田, 大塚, 坪内, 椎名, 岩原, 久恒, BWR オリフィス下流配管における減肉位置予測解析, 日本機械学会論文集, Vol. 79, No. 803, 2013, pp. 1309-1318.
- [2] 平, 固有直交分解による流体解析: 1. 基礎, ながれ, Vol. 30, 2011, pp. 115-123.
- [3] Stabile, G. and Rozza, G., "Finite volume POD-Galerkin stabilised order methods for the parametrized incompressible Navier-Stokes equations", Computers & Fluids, Vol. 173, 2018, pp. 273-284.
- [4] 菊地, 縮約モデルと粒子フィルタを用いたリアルタイムデータ同化計算, 第 45 回流体力学講演会/航空宇宙数値シミュレーション技術シンポジウム 2013 論文集, 2013, pp. 83-88.
- [5] Östth, J., Noack, B. R., Krajnović, S., Barros, D. and Borée, J., On the need for a nonlinear subscale turbulence term in POD models as exemplified for a high Reynolds number flow over an Ahmed body, Journal of Fluid Mechanics, Vol. 747, 2014, pp. 518-544.
- [6] OpenFOAM: <https://openfoam.org/>, (accessed 2018-10-31).
- [7] Sirovich, L., Turbulence and the dynamics of coherent structures, Parts I-III, Q. Appl. Math. Vol. XLV, No. 3, 1987, pp. 561-590.
- [8] Menter, F. R., Two-Equation Eddy-Viscosity Turbulence Models for Engineering Applications, AIAA Journal, Vol. 32, No. 8, 1994, pp. 1598-1605.
- [9] 畠沢, まっすぐな円管内の乱流旋回流の特性 (広い旋回強度範囲における旋回の減衰), 日本機械学会論文集, Vol. 75, No. 754, 2009, pp. 1275-1286.
- [10] Speziale, C.G., Sarkar, S. and Gatski, T.B., "Modelling the pressure-strain correlation of turbulence: an invariant dynamical systems approach, Journal of Fluid Mechanics", Vol. 227(1991), pp. 245-272.