OpenFOAM勉強会 for beginner @ 関東

「数値流体力学」輪講
～ 準備編 ～

第3回
ベクトル解析の基礎2
テンソルについて

日時：2013年3月2日、14:10～
場所：日本ESI@新宿

「数値流体力学」輪講に関して

目的

数値流体力学の知識(特に理論ベース)を深め、
OpenFOAMの利用に役立てること。

本輪講で学ぶもの

数値流体力学の理論や計算手法の概要。

書籍

数値流体力学【第2版】

原著： H. K. Versteeg & W. Malalasekera

共訳： 松下洋介、斎藤泰洋
青木秀之、三浦隆利

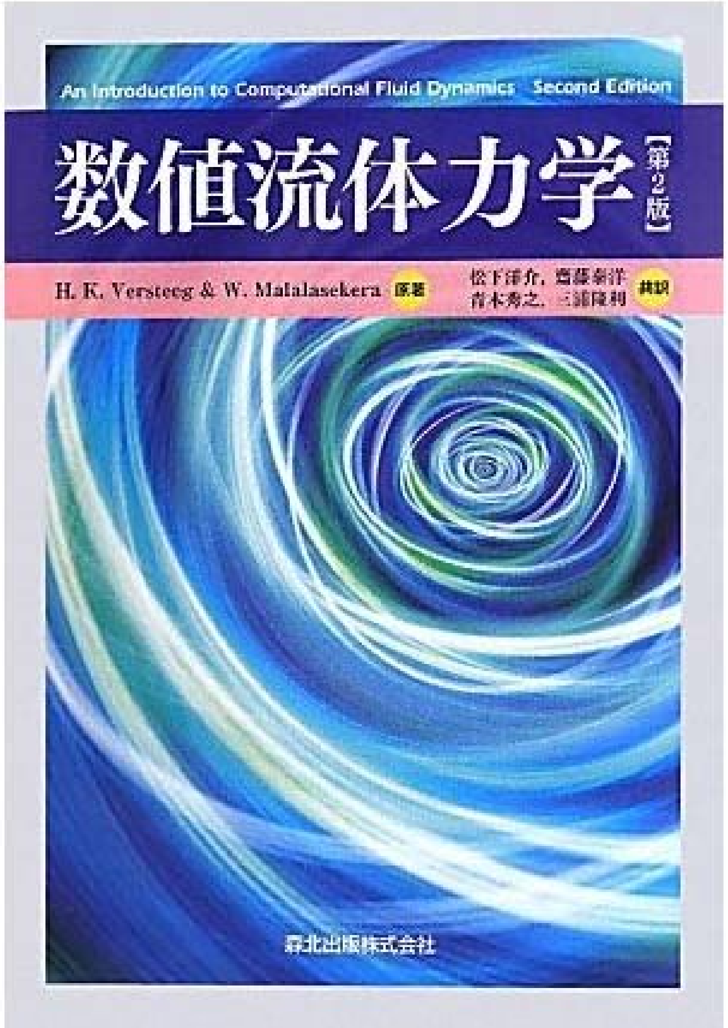
出版社： 森北出版株式会社

出版年月： 2011年7月

価格： 9975円 ← 高い･･･

ページ数： 544ページ ← 量が多い･･･

※ 有限体積法を説明した書籍(和書)の中では、最も丁寧に記述されている。



書籍の共同購入について

- マストではありませんが、本書籍を購入することをお勧めします。
- 10冊以上のまとめて購入すれば割引価格で購入できます(15%引き)。

↓

<u>購入者を10人以上募り、共同購入したいと思います。</u>

- 本講義終了後、購入希望者をとりまとめます。
- なお、共同購入の〆は、6/7(今のところ)ですので他に共同購入をしたい人はそれまでに連絡ください。
  連絡は今野様まで(、でよいでしょうか？)

進め方

	日程	内容
準備編	2013年1月	微分積分の復習
	2013年3月	ベクトル解析の基礎1
	2013年5月	ベクトル解析の基礎2
本編	2013年6月～	前ページの書籍の輪講

4月は急にお休みをして、すみませんでした！

前回までの復習

- ベクトル解析の基本的な事項を振り返りました。

$$\mathrm{grad}f = \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k} = \nabla f$$ (ベクトル量)

$$\mathrm{div}\boldsymbol{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \nabla \cdot \boldsymbol{A}$$ (スカラー量)

$$\mathrm{div}(\mathrm{grad}f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \nabla^2 f$$ (スカラー量)

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}$$

(ベクトル量)

ベクトルの積分

ベクトル関数$\boldsymbol{A}$がある変数tの連続な関数であるとき、
$\boldsymbol{A}$をtで微分したものが$\boldsymbol{B}$ (ベクトル関数)である場合、

$$\boldsymbol{B} = \frac{d\boldsymbol{A}}{dt}$$

つまり、$\boldsymbol{A}$は$\boldsymbol{B}$の原始関数なので、

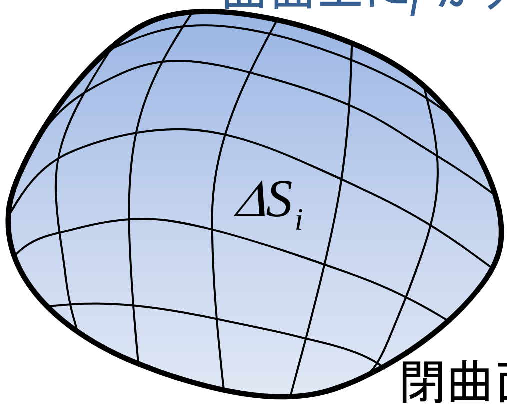
$$\boldsymbol{A} = \int \boldsymbol{B} dt + \boldsymbol{C}$$ (ベクトルの不定積分)

任意ベクトル

※　同様に、定積分も定義できる(ここでは省略)

面積分、体積分

ある閉曲面Sがあり、この曲面上にスカラー場$f(x, y, z)$が分布しているとする。



Sを曲線の網で細かく分解し、それに番号をつけ各小片の面積をΔS_iとする。また、各小片上に任意に1点Piをとり、和$\sum f(P_i)\Delta S_i$を作る。

$\Delta S_i \to 0$ のとき、以下のように書く。

面積分の表記

$$\boxed{\lim_{\Delta S_i \to 0} \sum f(P_i)\Delta S_i = \iint_S f dS}$$

これを面積分と呼び、一般には上式の右辺のように書く。

体積分も上記と同様の発想で、以下のように書ける。

$$\boxed{\lim_{\Delta V_i \to 0} \sum f(P_i)\Delta V_i = \iiint_V f dV}$$

体積分の表記

ガウスの発散定理

空間中に、ベクトル場$\boldsymbol{A}$が定義されている場合、

$$\boxed{\iiint_V \mathrm{div}\boldsymbol{A}dV = \iint_S \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}dS}$$

が成立する。この関係式をガウスの発散定理と呼ぶ。
(n : 領域Vを囲む表面Sの法線ベクトル)

div$\boldsymbol{A}$ の意味 ⇒ 単位体積当たりのベクトルAの正味流入出量

⬇

$\iiint_V \mathrm{div}\boldsymbol{A}dV$ の意味 ⇒ 領域VからのベクトルAの正味流入出量

$\iint_S \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}dS$ の意味 ⇒ 領域Vを囲む表面Sから流入出する
ベクトルAの量

領域VからのベクトルAの正味流出量 ＝ 領域Vを囲む表面Sから流入出するベクトルAの量

ガウスの発散定理と流体力学

ベクトル場$\boldsymbol{A}$を次のように書き換える。

$$\boldsymbol{A} = \rho \boldsymbol{u} \quad (\rho\text{: 流体の密度、}\boldsymbol{u}\text{: 流体の速度ベクトル})$$

これをガウスの発散定理に代入すると、

$$\iiint_V \mathrm{div}(\rho \boldsymbol{u}) dV = \iint_S \rho \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n} dS$$

一方、ある領域Vにおけるρの単位時間当たりの変化量は、
領域Vを囲む表面Sから流入出するρのフラックス($\rho\,\boldsymbol{u}$)の総量に
等しいので、

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\iiint_V \rho dV\right\} = \iint_S \rho \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n} dS = \iiint_V \mathrm{div}(\rho \boldsymbol{u}) dV$$

$$\boxed{\therefore \iiint_V \left\{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho \boldsymbol{u})\right\} dV = 0}$$

流体の質量保存式

シンボリック表記or指標表記

Navier-Stokes方程式(非圧縮性)

シンボリック表記: $$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{u} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu \nabla^2 \boldsymbol{u}$$

指標表記: $$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(u_i u_j) = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}$$

- 「シンボリック表記」の式は、これまでの知識で理解できるはず(?)
- 上の二つの式は、表記法が違うだけで同じ式。

ここからは、「指標表記」の式に関するお話をします。
特に乱流解析分野では、下の表記が好んで(?)使用されており、輪講テキストでも「乱流とそのモデリング」の章から、突如出てきます。

流体力学における指標表記に関して

「OpenFOAMのProgrammer’s Guide」に指標表記に関する基本的な説明が書いてあります。

ここからの話は、Programmer’s Guideに沿い、指標表記の概要を説明していきます。詳細については、Programmer’s Guideで”ぜひ”確認してください。

テンソルの概念の導入

スカラー量 ➡ 大きさのみ示す(1成分)

ベクトル量 ➡ 大きさ+方向を示す(大抵3成分)

-------- 以上が、これまでの内容 --------

例) 応力・・・9成分ある ➡ こういうのをどう取り扱えばよいか？

⬇

テンソルの概念の導入

テンソル

スカラー、ベクトル量に加え応力など9成分存在する物理量などを一般化し、まとめて取り扱えるようにしたもの。

(狭義ではあるが非常に簡単にいえば)

テンソルの分類と指標表記

階数	読み	表記
ランク0のテンソル	スカラー	例) 圧力 p
ランク1のテンソル	ベクトル	例) 方向 $x_i = (x_1, x_2, x_3)$ 例) 速度 $u_i = (u_1, u_2, u_3)$
ランク2のテンソル	(2階)テンソル	例) レイノルズ応力 $\tau_{ij} = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{pmatrix}$

※ $(x_1, x_2, x_3) = (x, y, z)$ とすれば、x-y-z直交座標系に対応

※ 速度も同様に $(u_1, u_2, u_3) = (u, v, w)$ と書ける

内積(アインシュタインの縮約規約)①

ベクトル、a_i 、b_i の内積

$$s = a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

添え字がそろっている場合、二つのベクトルの内積を取ることを意味する。

添え字はiでなくても上記表記と同じ形を取れば同じ内積

$$a_i b_i = a_j b_j = a_k b_k = \cdots$$

※ ベクトル同士の内積はスカラー量となる

例) 連続の式 $\mathrm{div}\boldsymbol{u} = 0$

$$\mathrm{div}\boldsymbol{u} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}$$

内積(アインシュタインの縮約規約)②

テンソル T_{ij} と、ベクトル a_i の内積

$$b_i = T_{ij} a_j = \begin{pmatrix} T_{11}a_1 + T_{12}a_2 + T_{13}a_3 \\ T_{21}a_1 + T_{22}a_2 + T_{23}a_3 \\ T_{31}a_1 + T_{32}a_2 + T_{33}a_3 \end{pmatrix}$$

(列ベクトルで表示)

添え字jで内積。

イメージ：内積を取った添え字j は消え、添え字iだけ残る。
添え字iがついたベクトル量となる。

※ テンソルとベクトルの内積はベクトル量となる

内積(アインシュタインの縮約規約)③

テンソル T_{ij} と、テンソル S_{ij} の内積

$$
\begin{aligned}
s = T_{ij}S_{ij} = T_{11}S_{11} + T_{12}S_{12} + T_{13}S_{13} \\
+ T_{21}S_{21} + T_{22}S_{22} + T_{23}S_{23} \\
+ T_{31}S_{31} + T_{32}S_{32} + T_{33}S_{33}
\end{aligned}
$$

添え字ijで内積。

※ テンソルとテンソルの内積はスカラー量となる

例) 散逸率　$2\nu S_{ij}S_{ij}$　　S_{ij} :ひずみ速度テンソル $S_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$

$$
\begin{aligned}
2\nu S_{ij}S_{ij} = 2\nu(S_{11}S_{11} + S_{12}S_{12} + S_{13}S_{13} \\
+ S_{21}S_{21} + S_{22}S_{22} + S_{23}S_{23} \\
+ S_{31}S_{31} + S_{32}S_{32} + S_{33}S_{33})
\end{aligned}
$$

$S_{ij} = S_{ji}$ (対称テンソル)より、

$$
\therefore 2\nu S_{ij}S_{ij} = 2\nu(S_{11}S_{11} + S_{22}S_{22} + S_{33}S_{33} + 2S_{12}S_{12} + 2S_{23}S_{23} + 2S_{31}S_{31})
$$

ベクトルの直積(テンソル積)

ベクトル a_i と、テンソル b_j の直積は次のように与えられる。

$$T_{ij} = a_i b_j = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{pmatrix}$$

※ ベクトルの直積はテンソル量となる

※ ベクトルの直積はベクトルのテンソル積やクロネッカー積とよばれることもある。

例) 速度ベクトルの直積(対流項の一部)　$u_i u_j$

$$u_i u_j = \begin{pmatrix} u_1 u_1 & u_1 u_2 & u_1 u_3 \\ u_2 u_1 & u_2 u_2 & u_2 u_3 \\ u_3 u_1 & u_3 u_2 & u_3 u_3 \end{pmatrix} \quad \text{(対称テンソル)}$$

応用問題(?)

対流項 $\dfrac{\partial}{\partial x_j} u_i u_j$ はどう展開される？

[ヒント]　(1)ベクトルの直積、(2)テンソルとベクトルの内積

答え:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} u_i u_j = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x_1} u_1 u_1 + \dfrac{\partial}{\partial x_2} u_1 u_2 + \dfrac{\partial}{\partial x_3} u_1 u_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} u_2 u_1 + \dfrac{\partial}{\partial x_2} u_2 u_2 + \dfrac{\partial}{\partial x_3} u_2 u_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} u_3 u_1 + \dfrac{\partial}{\partial x_2} u_3 u_2 + \dfrac{\partial}{\partial x_3} u_3 u_3 \end{pmatrix}$$

(ベクトル量)

クロネッカーのデルタ

クロネッカーのデルタ δ_{ij} は以下のように記される。

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

δ_{ij} は単位テンソルと同じと言えるので。

$$\delta_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

クロネッカーのデルタの性質

- $\delta_{ij} a_j = a_i$
- $\delta_{ii} = 3$

エディントンのイプシロン

エディントンのイプシロン ε_{ijk} は以下のように記される。

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1, & (i,j,k) = (2,3,1),(3,1,2),(1,2,3) \quad [i,j,k\text{の偶置換}] \\ -1, & (i,j,k) = (3,2,1),(2,1,3),(1,3,2) \quad [i,j,k\text{の奇置換}] \\ 0, & \text{その他の}\,i,j,k\,\text{の組み合わせ} \end{cases}$$

$grad$, div, $div(grad)$, rotの対照表

ベクトル解析	Hamilton演算子	指標表記	展開(x-y-z直交座標系)
grad$f$	∇f	$\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$	$\dfrac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i}+\dfrac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j}+\dfrac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k}$
div$\boldsymbol{a}$	$\nabla\cdot\boldsymbol{a}$	$\dfrac{\partial a_i}{\partial x_i}$	$\dfrac{\partial a_x}{\partial x}+\dfrac{\partial a_y}{\partial y}+\dfrac{\partial a_z}{\partial z}$
div(grad$f$)	$\nabla^2 f$	$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$	$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}$
rot$\boldsymbol{a}$	$\nabla\times\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{e}_i\varepsilon_{ijk}\dfrac{\partial a_k}{\partial x_j}$	$\left(\dfrac{\partial a_z}{\partial y}-\dfrac{\partial a_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\left(\dfrac{\partial a_x}{\partial z}-\dfrac{\partial a_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\left(\dfrac{\partial a_y}{\partial x}-\dfrac{\partial a_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}$

※ $\boldsymbol{e}_i$: 単位ベクトル(指標表記)

おわりに

本講義では、数値流体力学輪講の準備のため、
ベクトル解析とテンソルの概要を振り返りました。

次回から、輪講に移りたいと思います。

ご清聴ありがとうございました