～　流体力学の基礎　～
第8回
流体摩擦および境界層3

OpenFOAM 勉強会 for beginner

2012年07月21日(土)

講習会のスケジュール概要 (あくまでも現時点での予定です)

OpenFOAM
勉強会
for beginner

流体力学の基礎		
第 1回目	2011.09	流体について
第 2回目	2011.10	流体静力学
第 3回目	2012.01	流体運動の基礎理論1
第 4回目	2012.02	流体運動の基礎理論2
第 5回目	2012.03	流体運動の基礎理論3
第 6回目	2012.04	流体摩擦および境界層1
第 7回目	2012.05	流体摩擦および境界層2
第 8回目	**2012.07**	**流体摩擦および境界層3**
第 9回目	2012.08	流体摩擦および境界層4、流体抵抗1
第 10回目	2012.09	流体抵抗2

前回までのお話

OpenFOAM
勉強会
for beginner

・円管内を流れる流体が管壁に及ぼす摩擦損失(係数)を紹介しました。

滑らかな円管の層流での損失ヘッド(ハーゲン・ポワズイユの法則)

Hagen・Poiseuille

$$\Delta h_f = \frac{64}{Re}\frac{l}{d}\frac{v^2}{2g} \qquad \left(\lambda = \frac{64}{Re}\right)$$

滑らかな円管の乱流での損失ヘッド(損失係数)

① ブラジウスの式 ($Re=3x10^3$～10^5)

Blasius

$$\lambda = 0.3164 Re^{-0.25}$$

② プラントル・カルマンの式($Re=3x10^3$～$3x10^6$)

Prandtl・Karman

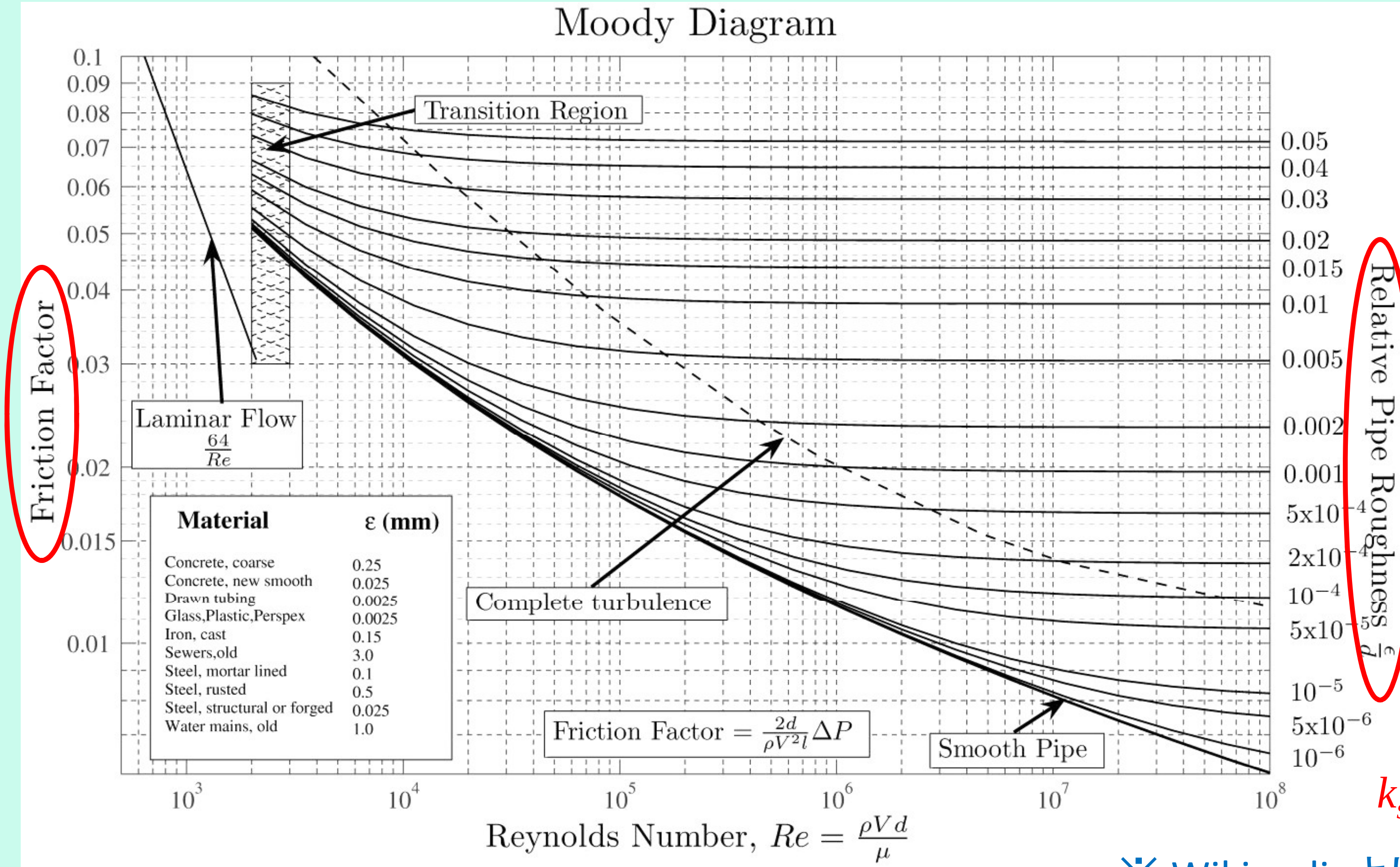
$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2.0\log_{10}\left(Re\sqrt{\lambda}\right) - 0.8$$

前回までのお話

OpenFOAM
勉強会
for beginner

円管の壁面が粗い場合の摩擦損失係数(ムーディ線図)

λ



管の表面粗さ(管径で正規化)

k_s/d

※ Wikipediaより

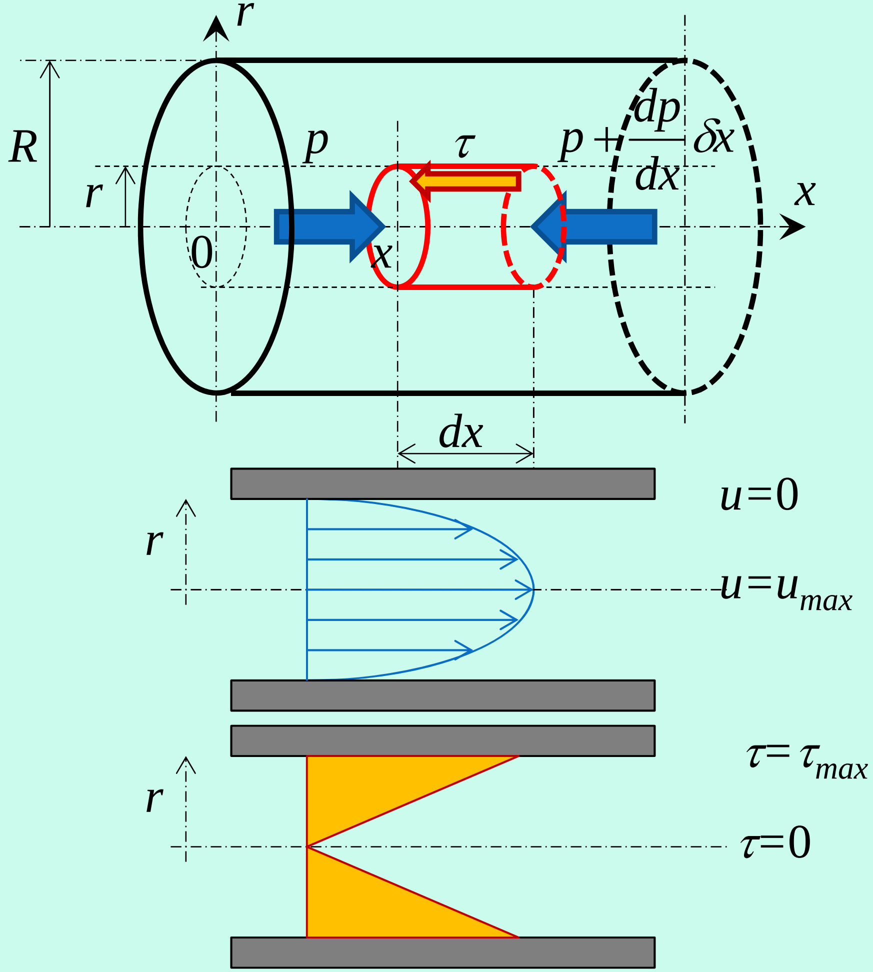
前回までのお話

OpenFOAM
勉強会
for beginner

- 層流の管路内流れで、管摩擦抵抗が64/*Re*で表せることを理論的に示しました。

$$\Delta h = \lambda \frac{l}{d}\frac{v^2}{2g} \qquad \lambda = \frac{64}{\mathrm{Re}}$$

$$\left(\mathrm{Re} = \frac{\rho v d}{\mu}\right)$$



今回のお話

- 円管内の流れが乱流の場合のお話です。
    - 乱流境界層について
    - 滑らかな円管内の乱流境界層分布の定式化
    - 粗い円管内の乱流

乱流中の乱れの表現

OpenFOAM
勉強会
for beginner

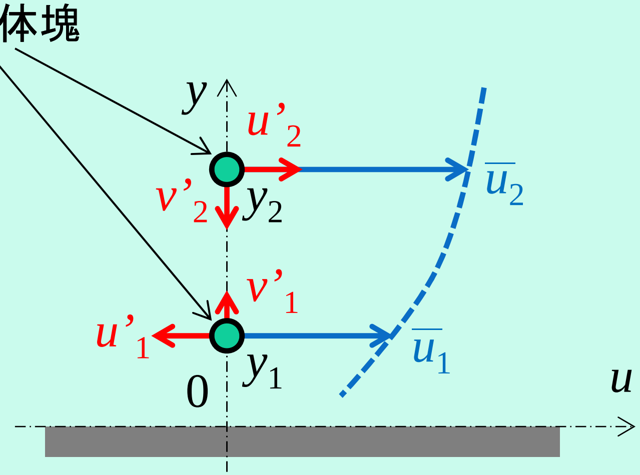
【仮定】 乱流の2次元流れを想定
(円管内の乱流境界層は周方向に一様な分布)

乱流中の瞬時流体速度 : $u,\ v$

$$u = \bar{u} + u'$$

$$v = \bar{v} + v'$$

時間平均を取るという意味　　平均流速　　流速の変動成分



$$\bar{u} = \frac{1}{T}\int_0^T u\,dt \qquad \bar{v} = \frac{1}{T}\int_0^T v\,dt \quad (=0)$$

また、

$$\overline{u'} = \frac{1}{T}\int_0^T u'\,dt = 0 \qquad \overline{v'} = \frac{1}{T}\int_0^T v'\,dt = 0$$

流体の変動の性質

OpenFOAM
勉強会
for beginner

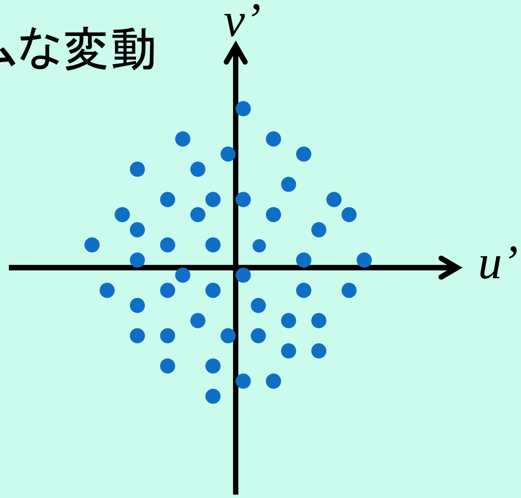
・ランダムな変動

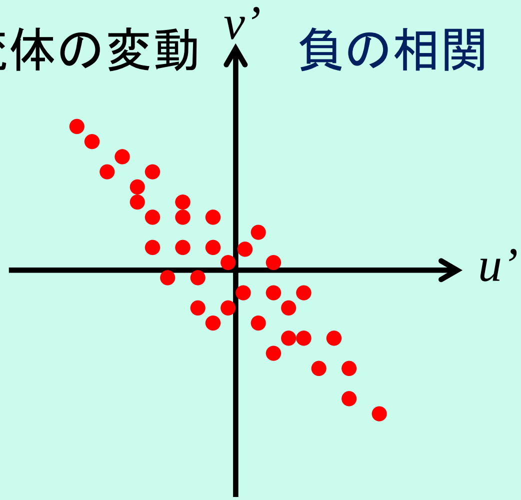
$$\overline{u' \times v'} = 0$$

・実際の流体の変動

$$\overline{u' \times v'} \neq 0$$

*u'*と*v'*に相関がある⇒(負の相関)





レイノルズ応力1

y方向の流体の運動量輸送を考える(右図)。

- 流体塊が有する単位時間、単位体積当たりのx方向の運動量

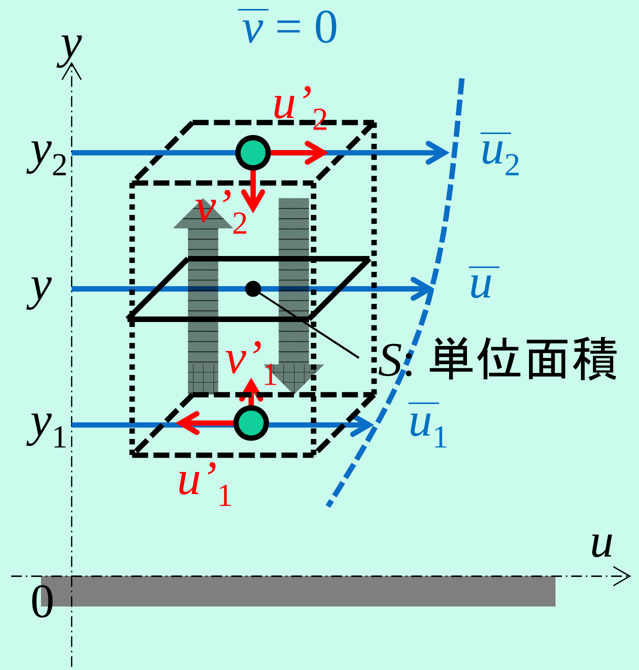
$$\rho u = \rho(\overline{u} + u')$$

- 単位時間当たりにy方向に輸送される流体塊の体積

$$\Delta V = v \cdot S = (\overline{v} + v')S$$

S=1、$\overline{v}$=0なので、

$$\Delta V = v'$$



レイノルズ応力2

y方向の流体の運動量輸送を考える(右図)。

- 単位時間当たりにy方向に輸送される流体塊の(x方向の)運動量

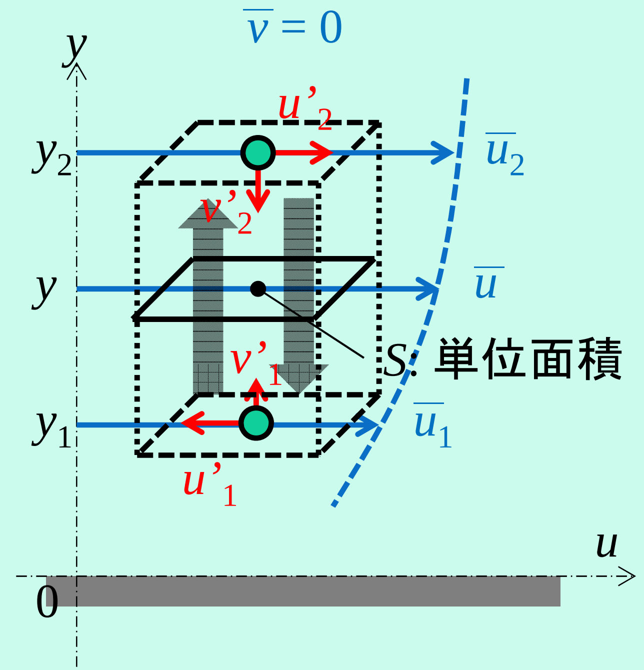
$$\rho u \Delta V = \rho(\overline{u} + u')v'$$

時間平均

$$\frac{1}{T}\int_0^T \rho u \Delta V dt = \frac{\rho}{T}\int_0^T (\overline{u} + u')v' dt$$

$$= \frac{\rho \overline{u}}{T}\int_0^T v' dt + \frac{\rho}{T}\int_0^T u'v' dt = \boxed{\rho \overline{u'v'}}$$

レイノルズ応力

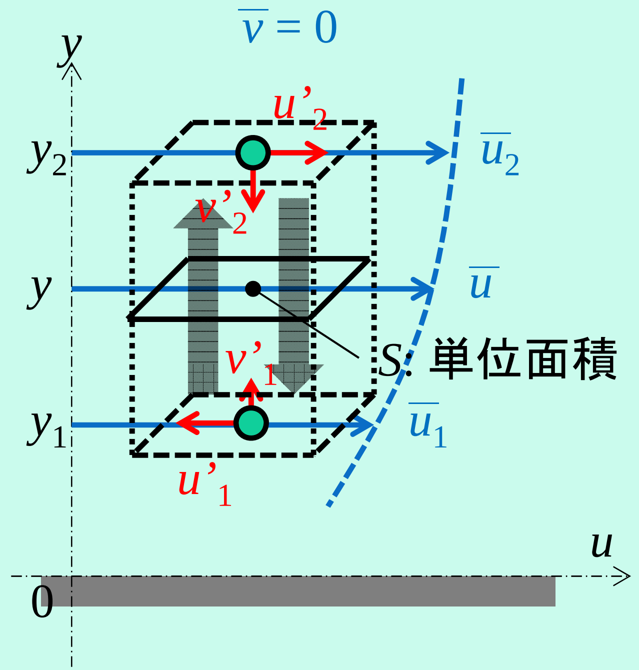


レイノルズ応力3

y方向の流体の運動量輸送を
考える(右図)。

- u'とv'に負の相関があるので、
実際のレイノルズ応力τ_tは次のようになる。

$$\boxed{\tau_t = -\rho \overline{u'v'}}$$



ブシネスクの渦粘性係数

OpenFOAM
勉強会
for beginner

ブシネスク(Boussinesq)は、層流の粘性効果の類推より、レイノルズ応力を次のように表現した。

$$\boxed{\tau_t = -\rho \overline{u'v'} = \rho \nu_t \frac{d\bar{u}}{dy}}$$

渦粘性モデル(乱流モデル)

特にμ_tを渦粘性係数と呼び、次元解析より次のように表現できる。

$$\boxed{\nu_t = clU}$$

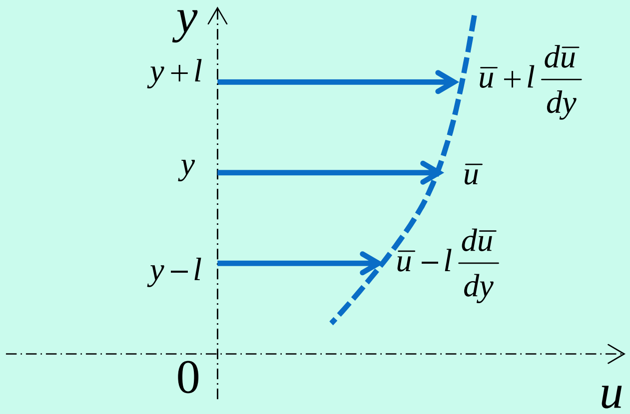
c:任意定数
l:代表長さ
U:代表速度

乱流による輸送は、主として大きなスケールの渦によって行われることを仮定している。

プラントルの混合距離理論1

OpenFOAM
勉強会
for beginner

右図より、$y+l$および$y-l$の流速をテイラー展開を用いて示す。



$$\bar{u}_{y+l} = \bar{u} + l_u \frac{d\bar{u}}{dy} + \frac{l_u^2}{2}\frac{d^2\bar{u}}{dy^2} + \cdots$$

$$\bar{u}_{y-l} = \bar{u} - l_u \frac{d\bar{u}}{dy} + \frac{l_u^2}{2}\frac{d^2\bar{u}}{dy^2} - \cdots$$

$y+l$層の流体塊がy層に到達した場合、および$y-l$の流体塊がy層に到達した場合、x方向の速度変動は次のように表される。

$$\overline{u'}_{y+l} = \bar{u}_{y+l} - \bar{u} \approx l_u \frac{d\bar{u}}{dy} \qquad \overline{u'}_{y-l} = \bar{u} - \bar{u}_{y-l} \approx l_u \frac{d\bar{u}}{dy}$$

プラントルの混合距離理論2

OpenFOAM
勉強会
for beginner

$$\overline{u'} = \frac{1}{2}\left(\overline{u'}_{y+l} + \overline{u'}_{y-l}\right) = l_u \frac{du}{dy}$$

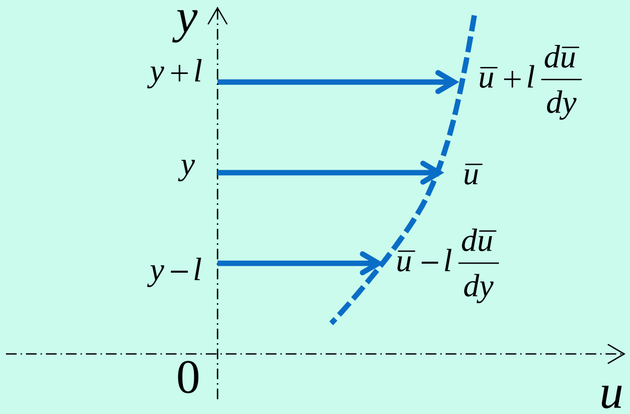
また、$\overline{u'} \propto \overline{v'}$とすると、

$$\overline{v'} = l_v \frac{du}{dy}$$

$\left|\overline{u'v'}\right| \approx \left|\overline{u'}\,\overline{v'}\right|$ とすると、

$$\left|\overline{u'v'}\right| \approx l^2 \left(\frac{du}{dy}\right)^2 \qquad l = \sqrt{\alpha l_u l_v}$$

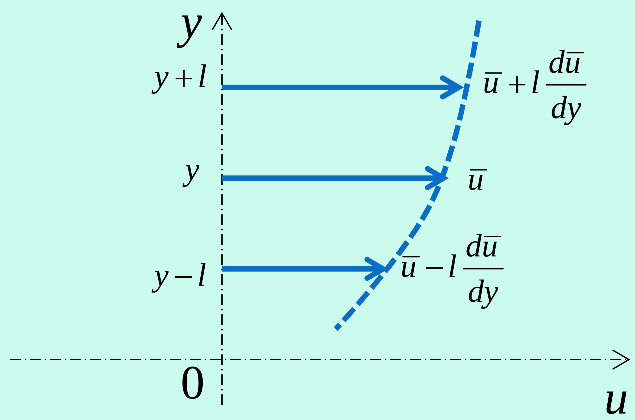
α: uv相関係数



プラントルの混合距離理論3

OpenFOAM
勉強会
for beginner

$$\left|\overline{u'v'}\right| \approx l^2\left(\frac{du}{dy}\right)^2$$



これをもとにレイノルズ応力の
渦粘性モデルを作ってみる。

$$\boxed{\tau_t = -\rho\overline{u'v'} = \rho l^2\left|\frac{du}{dy}\right|\frac{du}{dy} = \rho\nu_t\frac{du}{dy} \qquad \left(\nu_t = l^2\left|\frac{du}{dy}\right|\right)}$$

プラントル(Prandtl)の混合距離の仮説

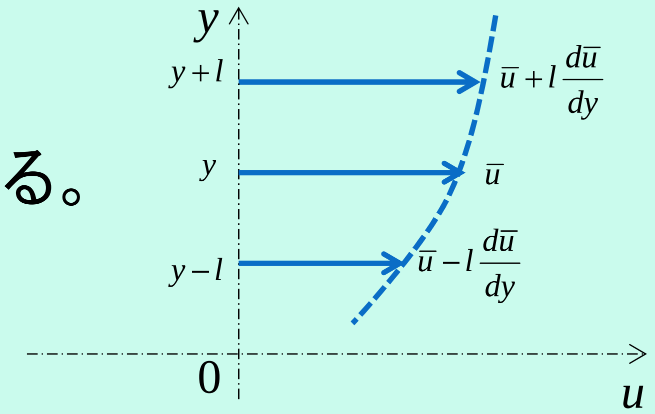
l: 混合距離

プラントルの混合距離理論4

壁面近くの混合距離
⇒壁面に束縛され、混合距離lは
壁面からの距離yに比例すると考えられる。

$$\boxed{l = \kappa y}$$

$$\boxed{\tau_t = -\rho \overline{u'v'} = \rho \kappa^2 y^2 \left| \frac{du}{dy} \right| \frac{du}{dy}}$$



乱流における円管内の速度分布：対数分布則1

壁面近傍におけるプラントルの混合距離理論より、

$$\tau_0 = \rho\kappa^2 y^2 \left(\frac{du}{dy}\right)^2$$

ただし、$du/dy>0$は正なので、絶対値符号を除去している。

$$\frac{du}{dy} = \frac{u_\tau}{\kappa y} \qquad \left(u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \right)$$

u_τ:摩擦速度

上式を積分すると、

$$\frac{u}{u_\tau} = \frac{1}{\kappa}\ln y + C$$

C:積分定数

乱流における円管内の速度分布：対数分布則2

壁面近傍の流れ ➡ ρ、ν、τ_0およびyに支配

また、$u_\tau = \sqrt{\dfrac{\tau_0}{\rho}}$

換言すると

壁面近傍の流れ ➡ ν、u_τおよびyに支配

壁面近くの速度分布はレイノルズ数に無関係

これら支配量(ν、u_τ、y)から作られる無次元長さをy^+とすると、

$$y^+ = \frac{u_\tau y}{\nu}$$

壁面近くの流速分布は、

$$\frac{u}{u_\tau} = f(y^+)$$

(プラントルの)壁法則

乱流における円管内の速度分布：対数分布則3

OpenFOAM
勉強会
for beginner

$$\frac{u}{u_\tau} = \frac{1}{\kappa}\ln y + C \qquad C:\text{積分定数}$$

壁法則が成立することを考え、レイノルズ数に依存しない普遍的な式を作る。

$$\frac{u}{u_\tau} = \frac{1}{\kappa}\ln y^{+} + A \qquad A:\text{普遍定数}$$

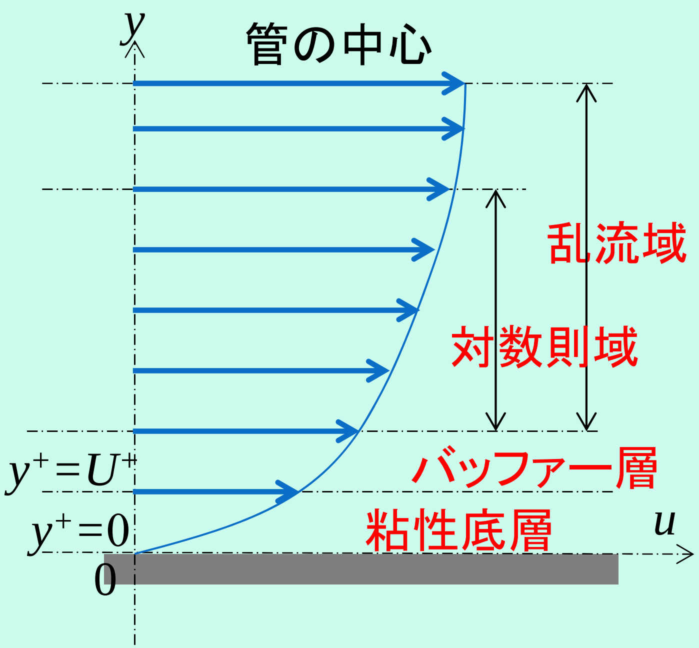
また、実験結果よりκ=0.4、A=5.5になる。

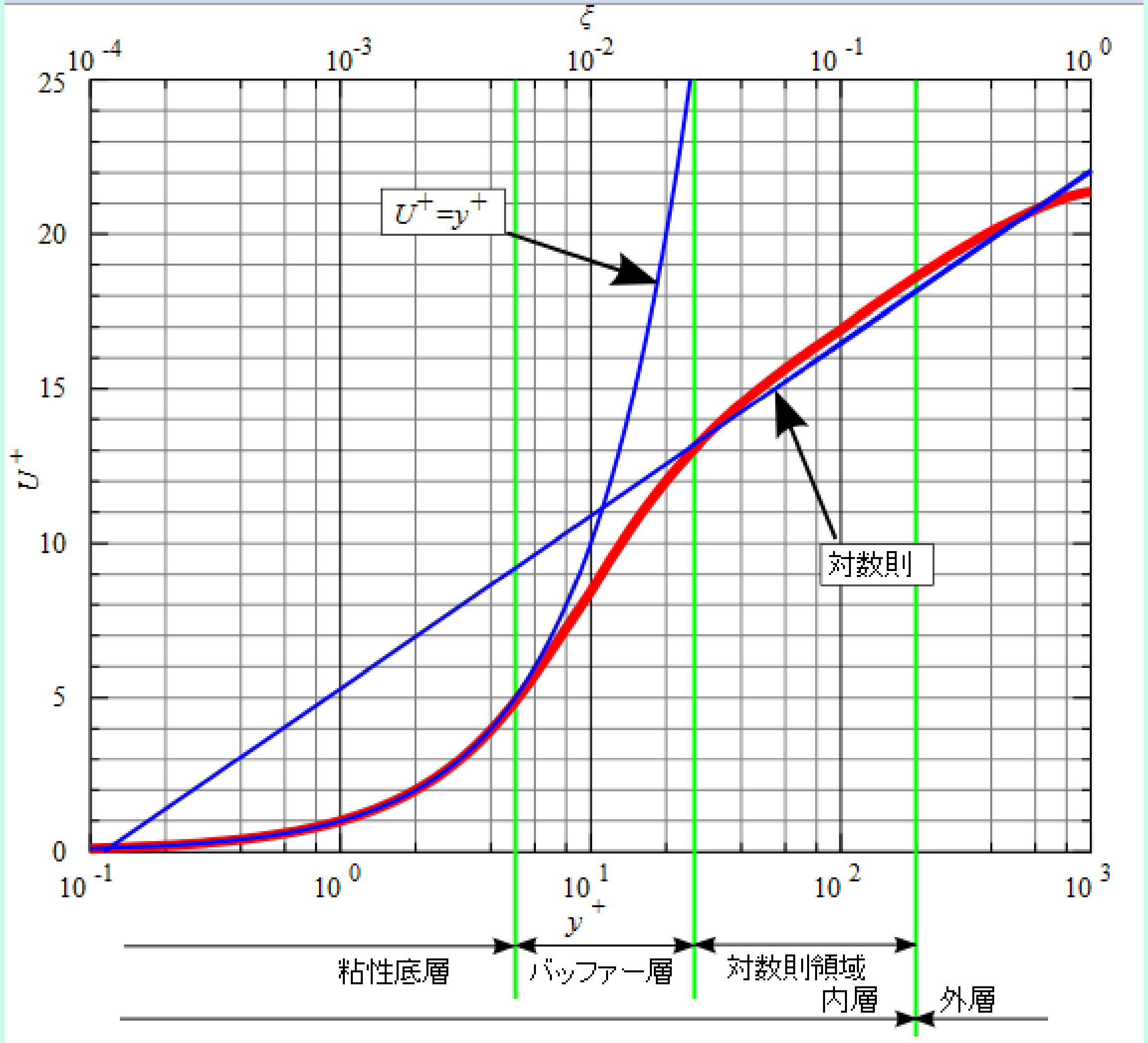
$$\boxed{\frac{u}{u_\tau} = 2.5\ln y^{+} + 5.5 \qquad \left(y^{+} = \frac{u_\tau y}{\nu} \right)}$$

対数分布則

乱流における円管内の速度分布：対数分布則4

OpenFOAM
勉強会
for beginner





※　右図：Wikipediaより

まとめ

本講座では、以下のことについて説明しました。

- レイノルズ応力を導出した。
- レイノルズ応力のモデル化として、渦粘性モデルを紹介した。
- 渦粘性モデルのプラントルの混合距離理論を用い、対数分布則を導出した。

次回の予告

次回の流体力学の基礎では、
「流体摩擦および境界層4、流体抵抗1」と
題して講習会を行います。

次回もOpenFOAM勉強会for beginnerの中
で行いたいと思います。

本日は、講習会「流体力学の基礎」に
お付き合い頂きありがとうございました。