～　流体力学の基礎　～
第4回
流体運動の基礎理論2

OpenFOAM 勉強会 for beginner

2012年02月25日(土)

講習会のスケジュール概要 (あくまでも現時点での予定です)

流体力学の基礎		
第 1回目	2011.09	流体について
第 2回目	2011.10	流体静力学
第 3回目	2012.01	流体運動の基礎理論1
第 4回目	**2012.02**	**流体運動の基礎理論2**
第 5回目	2012.03	流体運動の基礎理論3
第 6回目	2012.04	流体摩擦および境界層1
第 7回目	2012.05	流体摩擦および境界層2
第 8回目	2012.06	流体抵抗

前回のお話

OpenFOAM
勉強会
for beginner

流線、流跡線、流脈線の違いを説明した。

・詳細は前回の資料を参考にしてください！

連続の式(流管中の質量保存則)を導出した。

$$vA = Q_v = const. \qquad \text{(非圧縮、定常流)}$$

(v: 流速、A:流管断面積、Q_v:体積流量)

ベルヌーイの定理(流管中のエネルギー保存則)を導出した。

$$\frac{p}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} + z = const. \qquad \text{(非圧縮、定常流)}$$

(p: 圧力、ρ:流体密度、g:重力加速度、z:位置ヘッド)

今回のお話

流体運動の基礎理論2

・前回の続きとなります。

・連続の式、ベルヌーイの式あるいは運動量保存則を用いた応用問題を考えていきます。

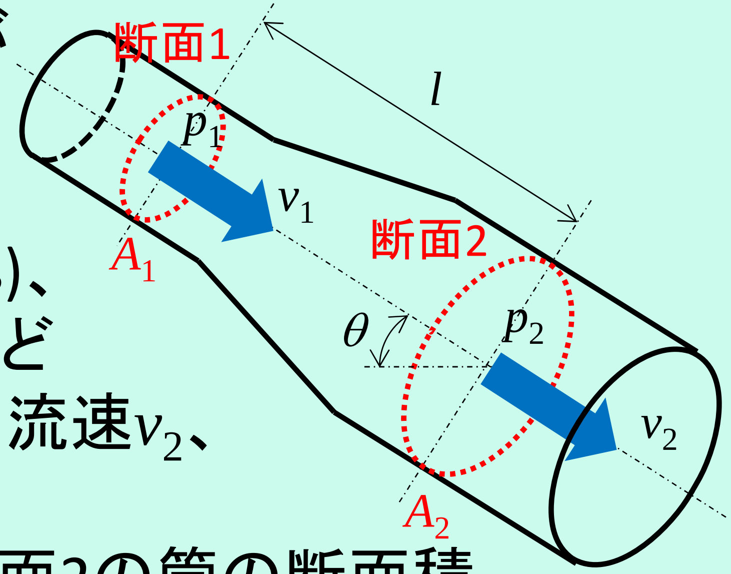
・応用問題を通して流体の諸現象、計測法などを見ていきます。

連続の式とベルヌーイの定理を使って問題を解こう①

問題1）

　右の図のように、断面積の異なる管がθ傾いて設置されており、この中を水が流れている。

　断面1における水の平均流速がv_1(m/s)、圧力がp_1(Pa)とすると、断面1からl(m)ほど下流に行った、断面2における水の平均流速v_2、および圧力p_2はどのようになるか。



　なお断面1の管の断面積はA_1(m^2)、断面2の管の断面積をA_2(m^2)とし、水の密度をρ (kg/m^3) 、重力加速度をg (m/s^2)とする。

連続の式とベルヌーイの定理を使って問題を解こう②

問題1）の回答

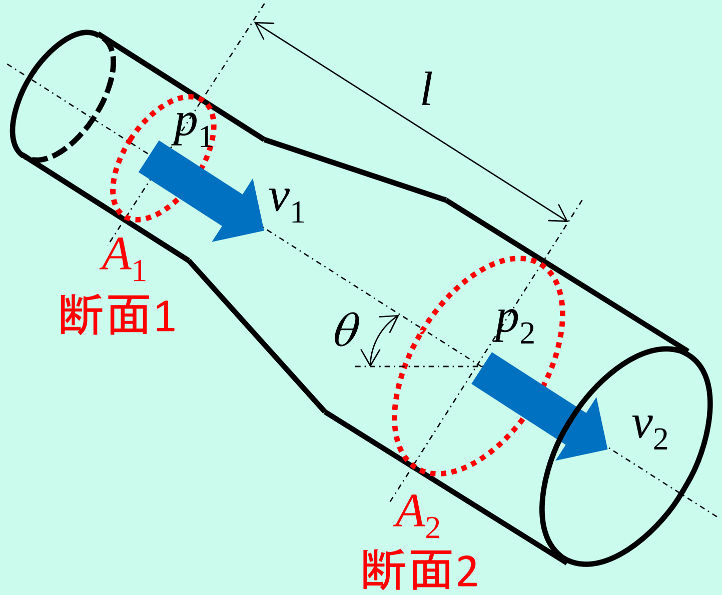
①断面2の平均流速を求める。

非圧縮性流体(水)、定常流なので、
連続の式は次のようになる。

$$vA = Q_v = const.$$

よって、 $v_1 A_1 = v_2 A_2$ なので、

断面2の平均流速は、 $\therefore v_2 = \dfrac{A_1}{A_2} v_1$



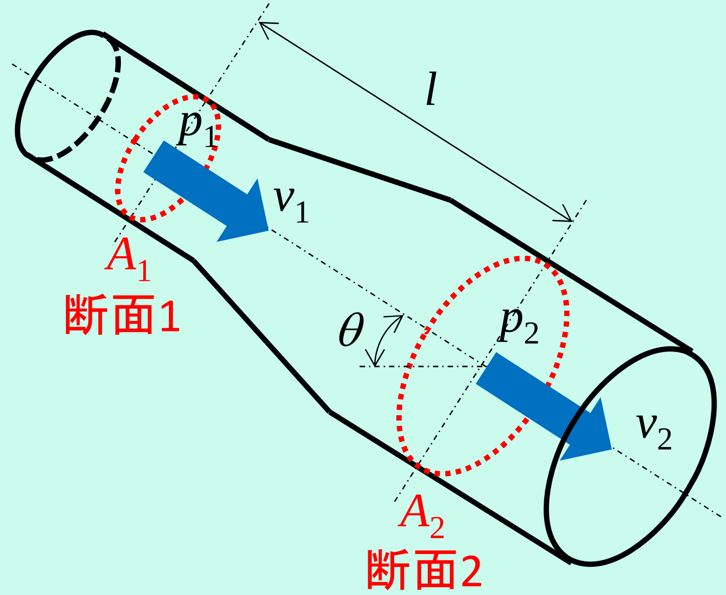
連続の式とベルヌーイの定理を使って問題を解こう③

OpenFOAM
勉強会
for beginner

問題1)の回答

②断面2の圧力を求める。

非圧縮性流体(水)、定常流の
ベルヌーイの式より、



$$\frac{p}{\rho g}+\frac{v^2}{2g}+z=const.$$

$$\therefore \frac{p_1}{\rho g}+\frac{v_1^2}{2g}+z_1=\frac{p_2}{\rho g}+\frac{v_2^2}{2g}+z_2$$

断面2の位置ヘッドz_2を基準点(つまり0)とすると、
断面1の位置ヘッドz_1は、 $z_1=l\cdot\sin\theta$

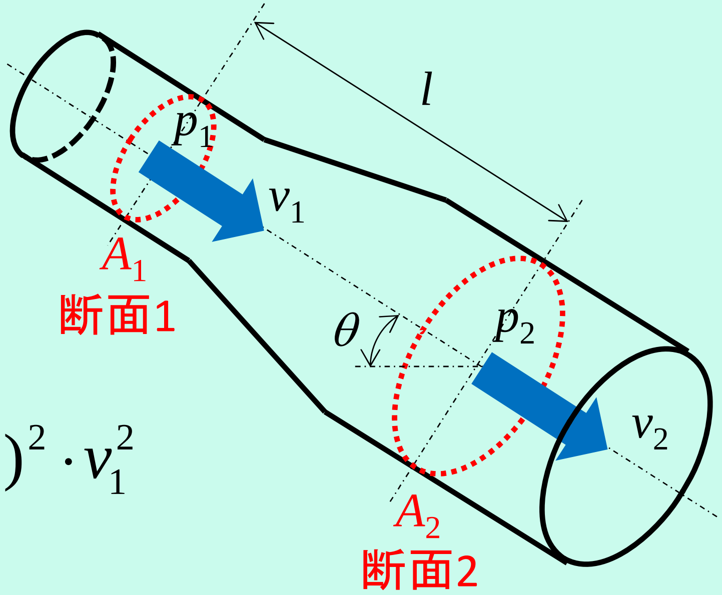
次のページ･･･

連続の式とベルヌーイの定理を使って問題を解こう④

OpenFOAM
勉強会
for beginner

問題1)の回答

前ページの続き



$$\frac{p_1}{\rho g}+\frac{v_1^2}{2g}+l\cdot\sin\theta=\frac{p_2}{\rho g}+\frac{v_2^2}{2g}$$

また、$v_2=(A_1/A_2)v_1$ より、

$$\frac{p_1}{\rho g}+\frac{v_1^2}{2g}+l\cdot\sin\theta=\frac{p_2}{\rho g}+\frac{1}{2g}(A_1/A_2)^2\cdot v_1^2$$

よって、断面2の圧力p_2は、

$$\therefore\ p_2=p_1+\frac{\rho}{2g}\left\{1-(A_1/A_2)^2\right\}\cdot v_1^2+\rho g l\cdot\sin\theta$$

連続の式とベルヌーイの定理を使って問題を解こう⑤

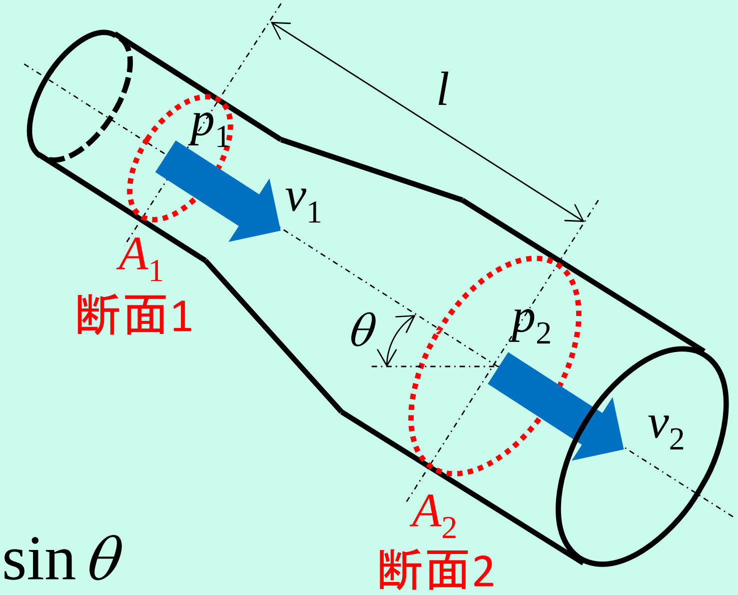
OpenFOAM
勉強会
for beginner

断面1,2の平均流速の関係式

$$v_2 = \frac{A_1}{A_2} v_1$$

$A_1 < A_2 \Rightarrow v_1 > v_2$

$A_1 \geq A_2 \Rightarrow v_1 \leq v_2$



断面1,2の圧力の関係式

$$p_2 = p_1 + \frac{\rho}{2g}\left\{1-(A_1/A_2)^2\right\}\cdot v_1^2 + \rho g l \cdot \sin\theta$$

$\theta \geq 0$ 、かつ、$A_1 < A_2 \Rightarrow p_1 < p_2$

$\theta \geq 0$ 、かつ、$A_1 \geq A_2 \Rightarrow p_1 \geq p_2$

ベルヌーイの定理を実際の管内の流れに適用する場合①

実際の管内を流れる流体は粘性を有しており、主に流体-管壁間で摩擦を生んでいる。

ベルヌーイの式を実際の流れで使用する場合、摩擦によるエネルギー損失分を考慮する必要がある。

$$\frac{p_1}{\rho g}+\frac{v_1^2}{2g}+z_1=\frac{p_2}{\rho g}+\frac{v_2^2}{2g}+z_2+\boxed{h_f}$$

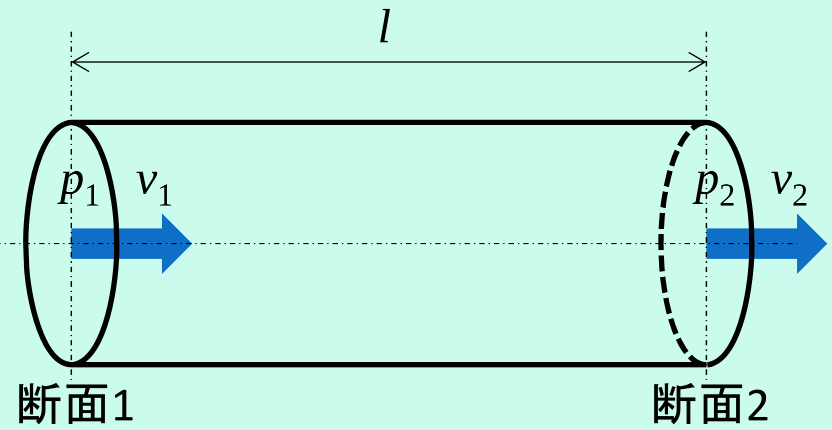
h_fは**損失ヘッド**と呼ばれ、摩擦によるエネルギー損失分がここで考慮される。

また、配管の設計などでは、管の形状(分岐や絞りなど･･･)の影響によるエネルギー損失分もこの損失ヘッドで定義する。

ベルヌーイの定理を実際の管内の流れに適用する場合②

OpenFOAM
勉強会
for beginner

右の図のような、水平に配置された直円管があったとする。
断面1と2の間の長さをlとする。



これをベルヌーイの式を用いて表すと、

$$\frac{p_1}{\rho g}+\frac{v_1^2}{2g}=\frac{p_2}{\rho g}+\frac{v_2^2}{2g}+h_f$$

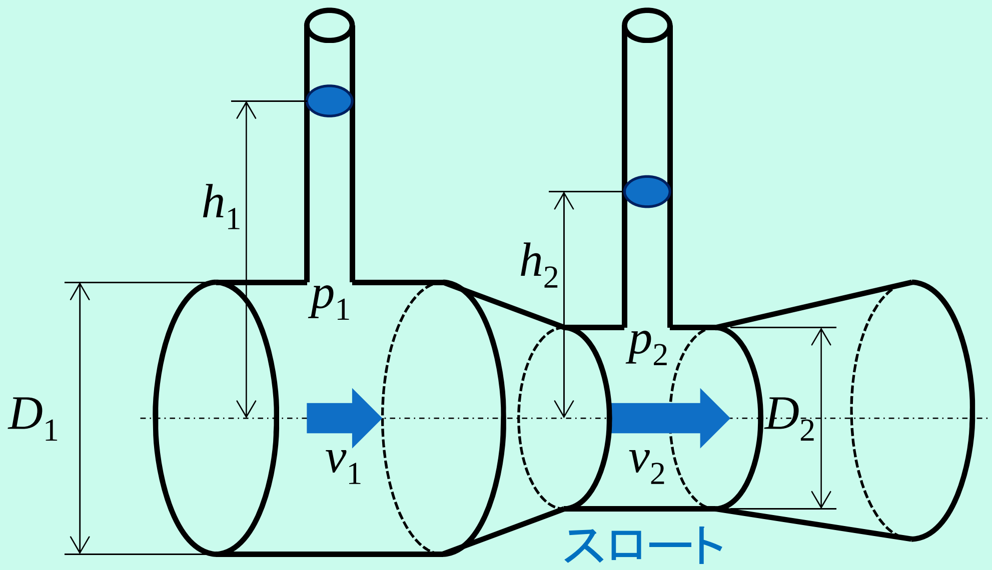
h_fは**ダルシー・ワイズバッハ(Darcy-Weisbach)の式**より、以下のように表される。

$$h_f=\lambda\frac{l}{D}\frac{v^2}{2g}$$

詳しくは次々回以降の講義で触れます。

ベンチュリ管による流量測定①

右の図のように、水平に配置された円管の一部を絞り、「スロート」という平行部分を少し設け、再び緩やかに元の断面積まで広げた管を「ベンチュリ管」と呼ぶ。



ベンチュリ管を用いることで、管内の流量(体積流量)が測定できる。

なお、ベンチュリ管はJISによって規格化されている。

ベンチュリ管のJIS規格　JIS Z 8762-3: 2007
JIS Z 8762-4: 2007

ベンチュリ管による流量測定②

OpenFOAM
勉強会
for beginner

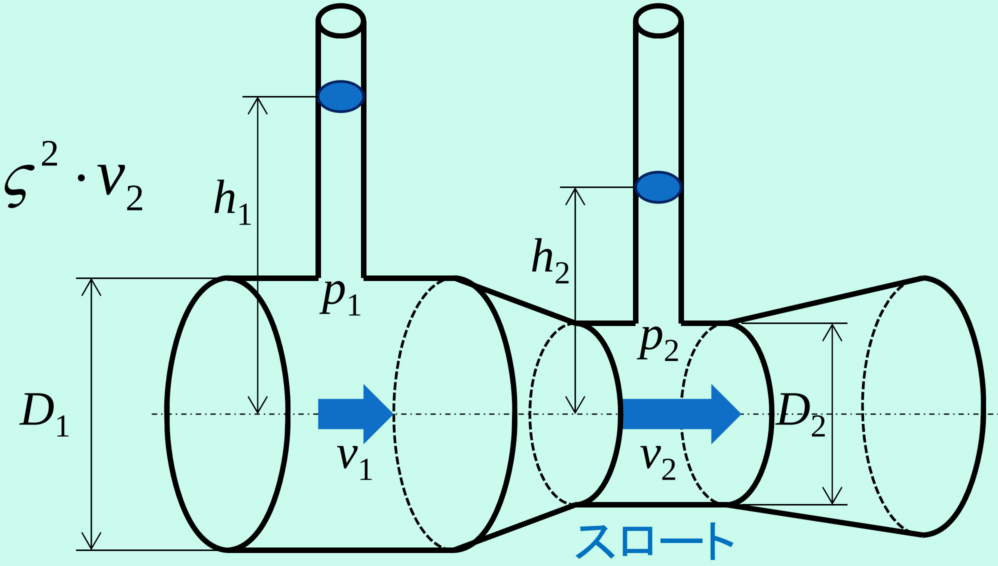
連続の式より、

$$v_1 = \frac{(\pi D_2^2/4)}{(\pi D_1^2/4)} v_2 = \left(\frac{D_2}{D_1}\right)^2 \cdot v_2 = \varsigma^2 \cdot v_2$$

なお、$\varsigma = (D_2/D_1)^2$

ベルヌーイの定理より、

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g}$$



これらの式を用い、v_2の関係式を求める。

$$v_2 = \frac{1}{\sqrt{1-\varsigma^2}} \sqrt{\frac{2}{\rho}(p_1 - p_2)}$$

ベンチュリ管による流量測定③

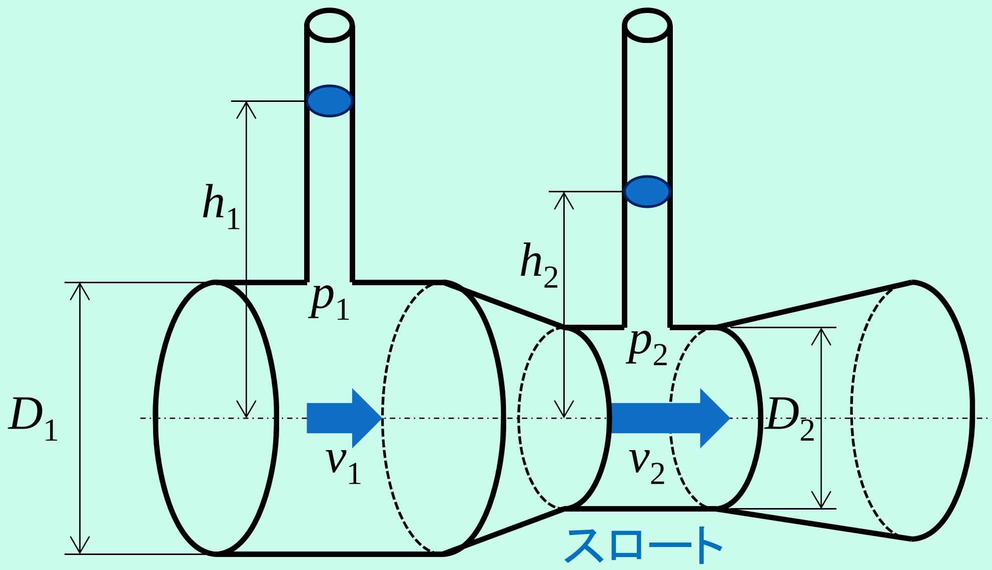
OpenFOAM
勉強会
for beginner

また、連続の式より、体積流量Q_vは次のように与えられる。

$$Q_v = A_2 v_2 = \frac{\pi D_2^2}{4} v_2$$

$$Q_v = \frac{\pi D_2^2}{4\sqrt{1-\varsigma^2}} \sqrt{\frac{2}{\rho}(p_1 - p_2)}$$

$$Q_v = \frac{\pi D_1^2 \varsigma}{4\sqrt{1-\varsigma^2}} \sqrt{\frac{2}{\rho}(p_1 - p_2)}$$



ベンチュリ管による流量測定④

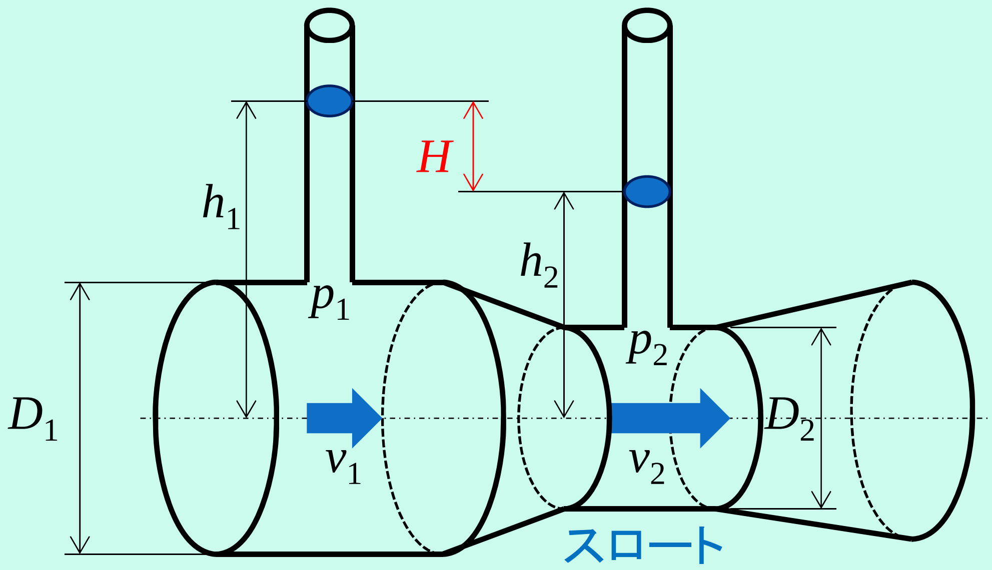
OpenFOAM
勉強会
for beginner

右の図より、圧力p_1、p_2は次のように与えられる。

$$p_1 = \rho g h_1$$

$$p_2 = \rho g h_2$$

$$p_1 - p_2 = \rho g (h_1 - h_2) = \rho g H$$



よって、ベンチュリ管の流量に関する関係式は次のようにまとめられる。

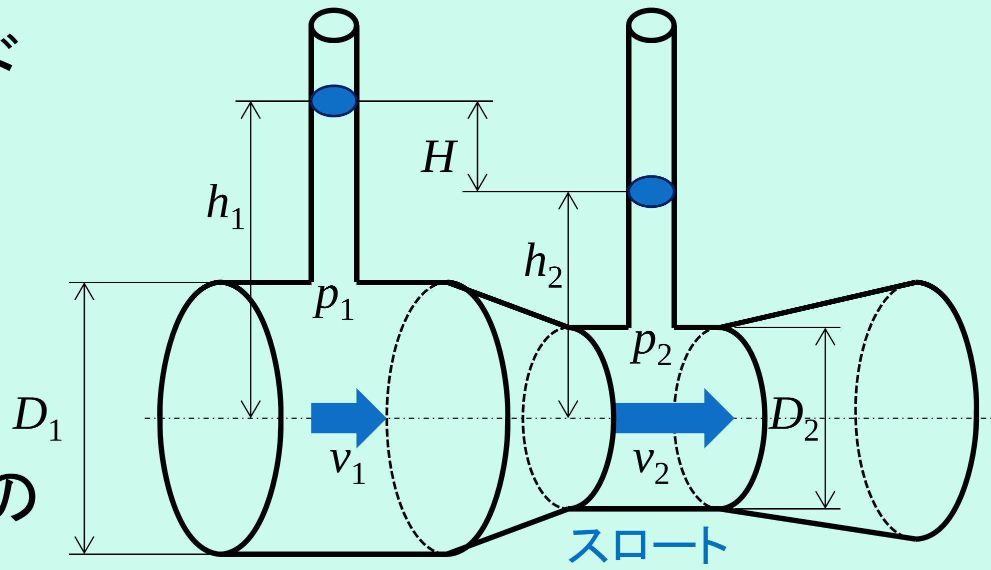
$$Q_v = \frac{\pi D_1^2 \varsigma}{4\sqrt{1-\varsigma^2}} \sqrt{2gH}$$

ベンチュリ管による流量測定⑤

実際の流れの場合、損失ヘッドをどう考慮するか。

$$\frac{p_1}{\rho g}+\frac{v_1^2}{2g}=\frac{p_2}{\rho g}+\frac{v_2^2}{2g}+\boxed{h_f}$$

この式を用いて、ベンチュリ管の流量関係式を作るのは大変。



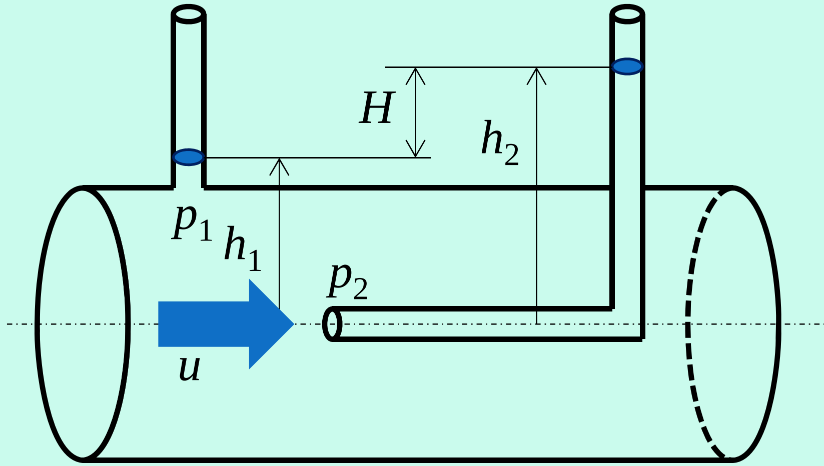
そこで、流量係数cを用いる。

$$Q_v=\boxed{c}\frac{\pi D_1^2\varsigma}{4\sqrt{1-\varsigma^2}}\sqrt{2gH} \qquad 0\le c\le 1$$

ピトー管による平均流速測定①

OpenFOAM
勉強会
for beginner

右の図のように、両端の開いている1本の管を直角に曲げたものを「ピトー管」と呼び、管の一端を流体中の流れ方向に向け、流体の全圧を測定し、平均流速を求めるものである。



なお、ピトー管もJISによって規格化されている。

ピトー管のJIS規格　　JIS B 8330

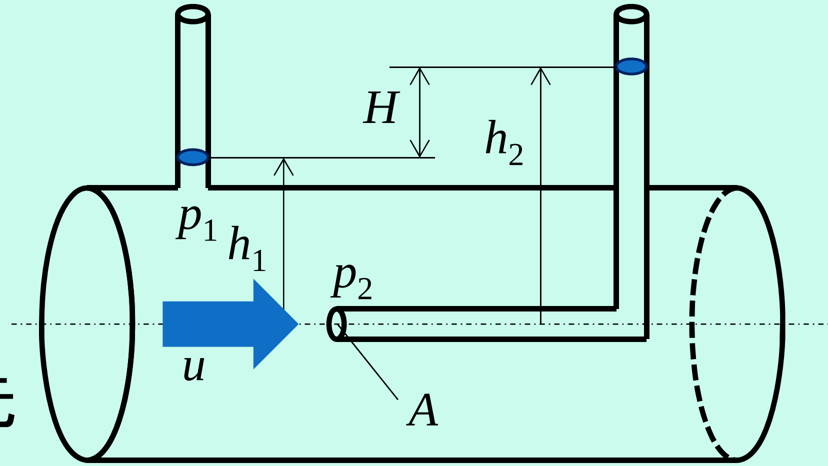
ピトー管による平均流速測定②

OpenFOAM
勉強会
for beginner

位置ヘッドの影響を考慮しない
ベルヌーイの定理より、

$$\frac{p}{\rho g}+\frac{v^2}{2g}=const.$$

$$\therefore\ p+\frac{\rho v^2}{2}=const.$$ ← 圧力の次元



特に、上式のpを静圧と呼ぶ。運動エネルギーの圧力換算値である、$p_v=\rho v^2/2$を動圧と呼び、さらに$p_t=p+p_v$を全圧と呼ぶ。

右上の図より、ピトー管の鉛直部分にある液面が静止状態と考えると、連続の式より、点Aの位置における流速も0と言える。

ピトー管による平均流速測定③

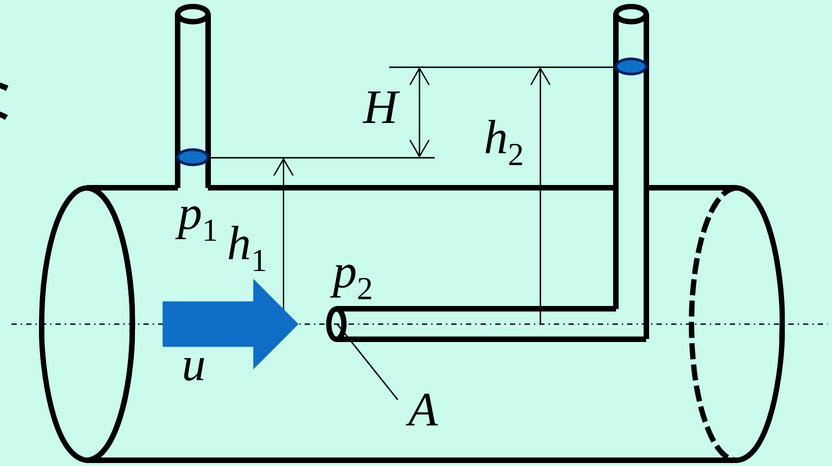
OpenFOAM
勉強会
for beginner

前ページの続き

ベルヌーイの定理より、次のような関係式が成立する。

$$\underline{p_1} + \underline{\frac{\rho u^2}{2}} = \underline{p_2}$$

静圧　動圧　全圧



$$\therefore u = \sqrt{\frac{2(p_2 - p_1)}{\rho}}$$

圧力p_1、p_2は次のように与えられる。

$$p_1 = \rho g h_1$$

$$p_2 = \rho g h_2$$

$$\boxed{\therefore u = \sqrt{2g(h_2 - h_1)} = \sqrt{2gH}}$$

ピトー管による平均流速測定④

前ページの続き

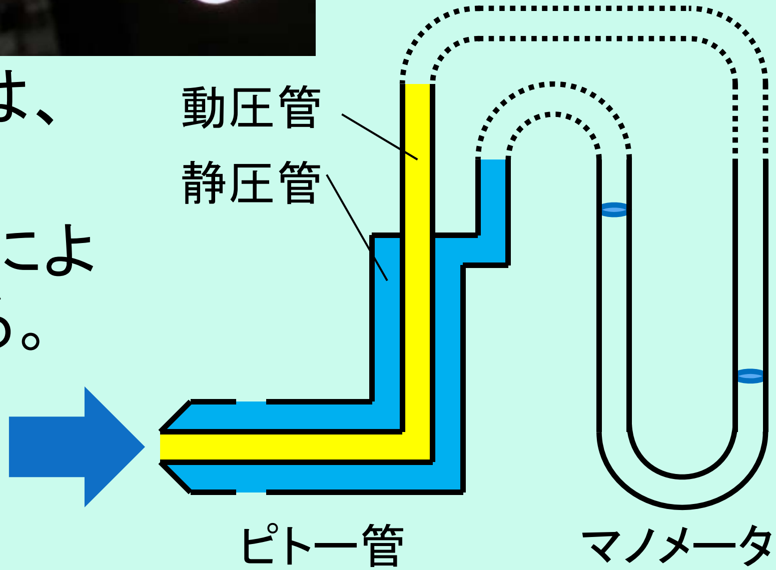
実際のピトー管を用いた流速計測では、ベンチュリ管と同様、エネルギー損失分を補正係数を用いて考慮する。

$$\therefore u = c\sqrt{2gH}$$

※Wikipediaより

ピトー管は平均流速の計測器としては、もっともポピュラーなものである。

実際、航空機の飛行速度はピトー管により計測されているものがほとんどである。



まとめ

本講座では、連続の式、ベルヌーイの定理の基本的な使い方を通して、以下のことについて学んだ。

(1) 同一管内において、管路の断面積が増大すると、平均流速は低下し、圧力が上昇する。
(2) 連続の式、ベルヌーイの定理を応用して、ベンチュリ管という流量計測器を設計することができる。
(3) 連続の式、ベルヌーイの定理を応用して、ピトー管という平均流速計測器を設計することができる。
(4) 流体の圧力は、場の圧力である静圧、流体の運動エネルギーの圧力換算値である動圧、そして、静圧と動圧を足した全圧と3種類に分類できる。