オープンCAE勉強会@関東

「数値流体力学」輪講

第4回
第3章：乱流とそのモデリング(3)
[3.5～3.7.1、p.64～75]

日時：2013年11月10日、14:00～
場所：日本ESI@新宿

「数値流体力学」輪講に関して

目的

数値流体力学の知識(特に理論ベース)を深め、OpenFOAMの利用に役立てること。

本輪講で学ぶもの

数値流体力学の理論や計算手法の概要。

書籍

数値流体力学【第2版】

原著：　H. K. Versteeg & W. Malalasekera

共訳：　松下洋介、斎藤泰洋
　　　　青木秀之、三浦隆利

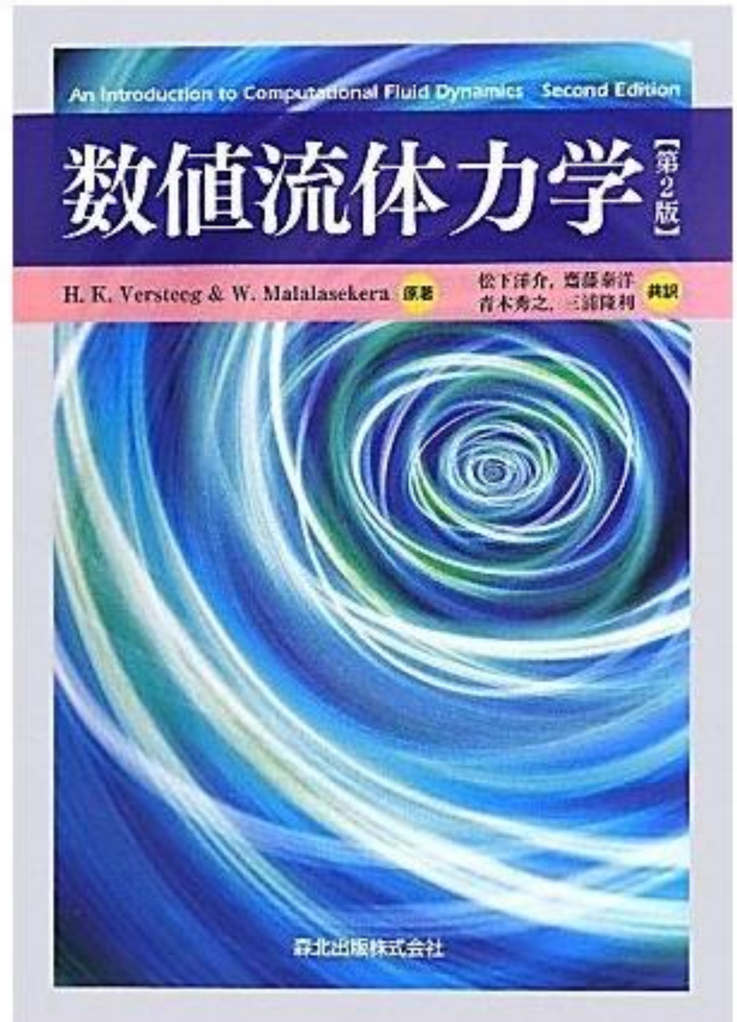
出版社：　森北出版株式会社

出版年月：　2011年7月

価格：　9975円　←　高い・・・

ページ数：　544ページ　←　量が多い・・・

※ 有限体積法を説明した書籍(和書)の中では、最も丁寧に記述されている。



本日

日程	パート部分	ページ
2013.11	第3章：乱流とそのモデリング 担当セクション：~~3.5～3.7.1~~	~~p.64～75~~

3.5～3.6　　p.64～69

ごめんなさい！
全部まとめられませんでした。

今回は、3.5～3.6節(p.64-69)に絞って説明したいと思います。3.7節以降は次回ということで・・・。

内容

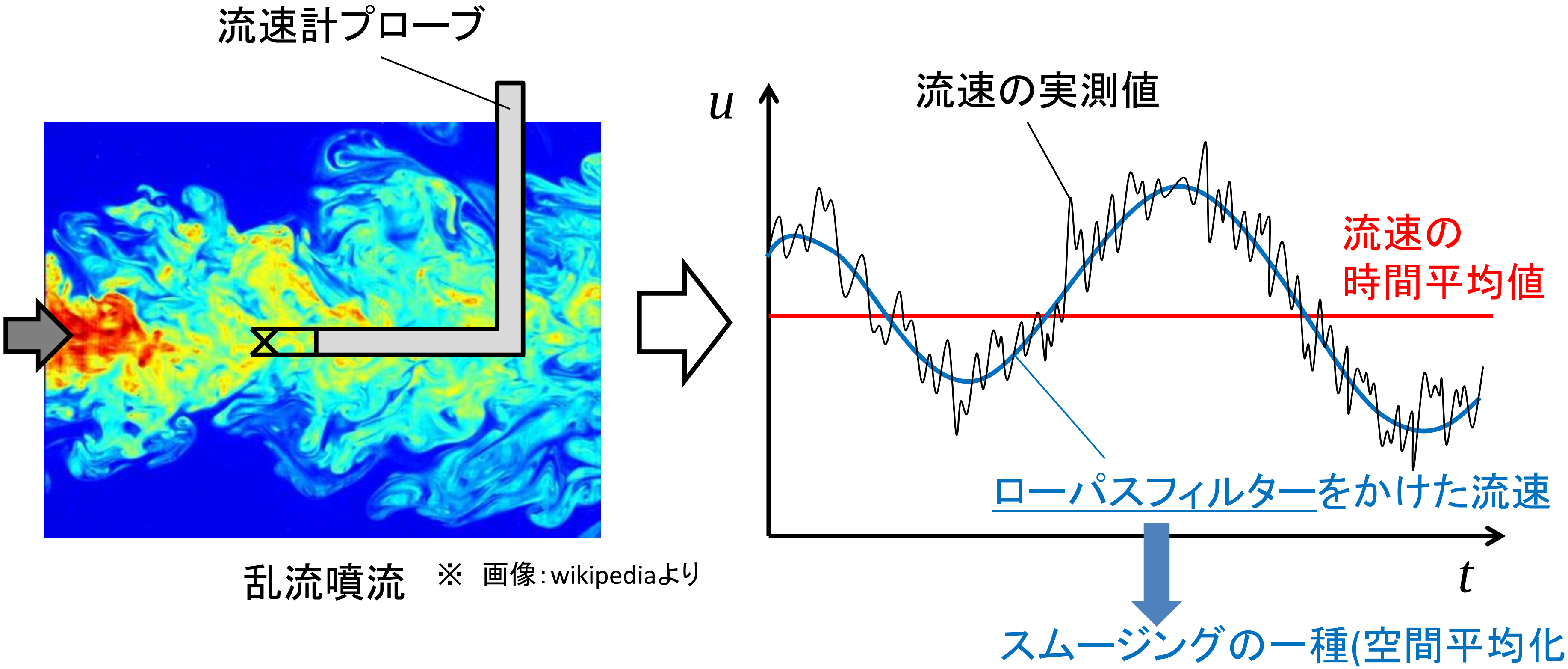
- 乱流流れの計算　・・・　3.6 (p.68～69)
- レイノルズ平均ナビエ-ストークス方程式(RANS)
  ・・・　3.5 (p.64～68)

内容

- 乱流流れの計算　・・・　3.6 (p.68〜69)

- レイノルズ平均ナビエ-ストークス方程式(RANS)　・・・　3.5 (p.64〜68)

乱流流れの特徴



乱流噴流　※ 画像:wikipediaより

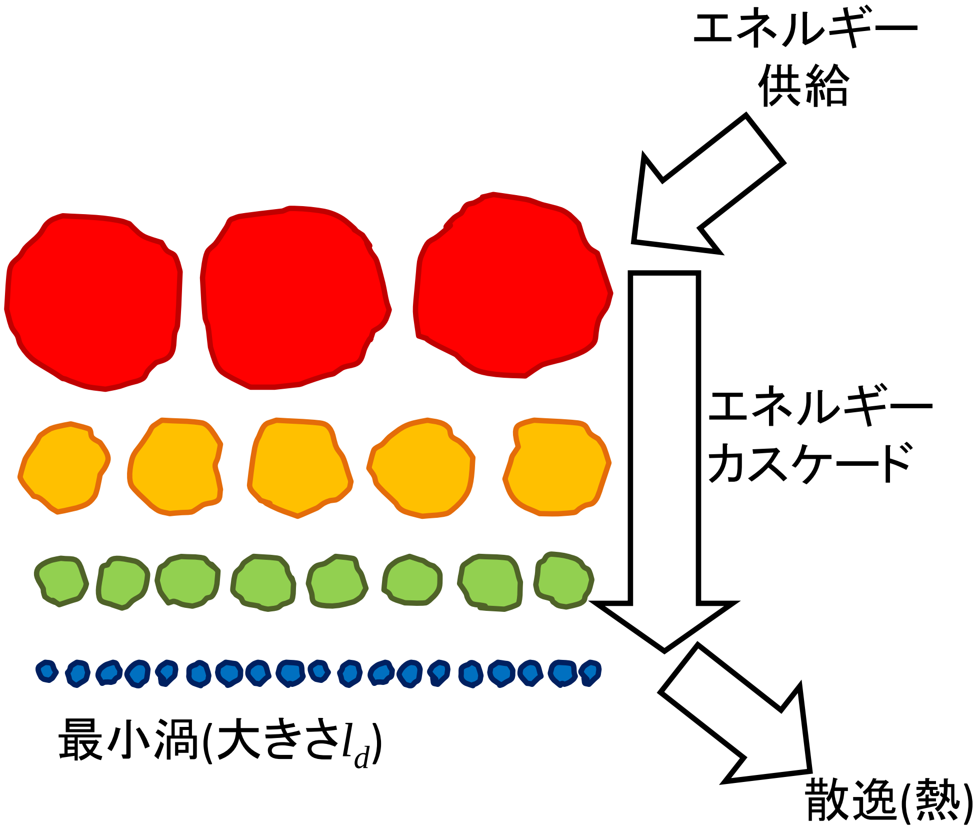
- 乱流の速度変動の要因

乱流中には、大小様々な渦構造が存在するため

エネルギーカスケードとコルモゴロフスケール

- エネルギーカスケード

乱流の運動エネルギーは、大きな渦から小さな渦へ(ほとんど散逸なく)輸送され、そのエネルギーは最小渦に至って熱に代わる。



- コルモゴロフスケール

上記の最小渦の大きさを次のように見積もることができる。

分子動粘性

$$l_d = \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon}\right)^{1/4}$$

散逸率

l_dをコルモゴロフスケールと呼び、乱流の最小渦スケールとして認識されている。

乱流流れの計算 (1)

- 直接数値シミュレーション
  (Direct Numerical Simulation: DNS)

  コルモゴロフスケールまで計算格子を細かく切り、乱流構造のすべてを直接計算する方法。

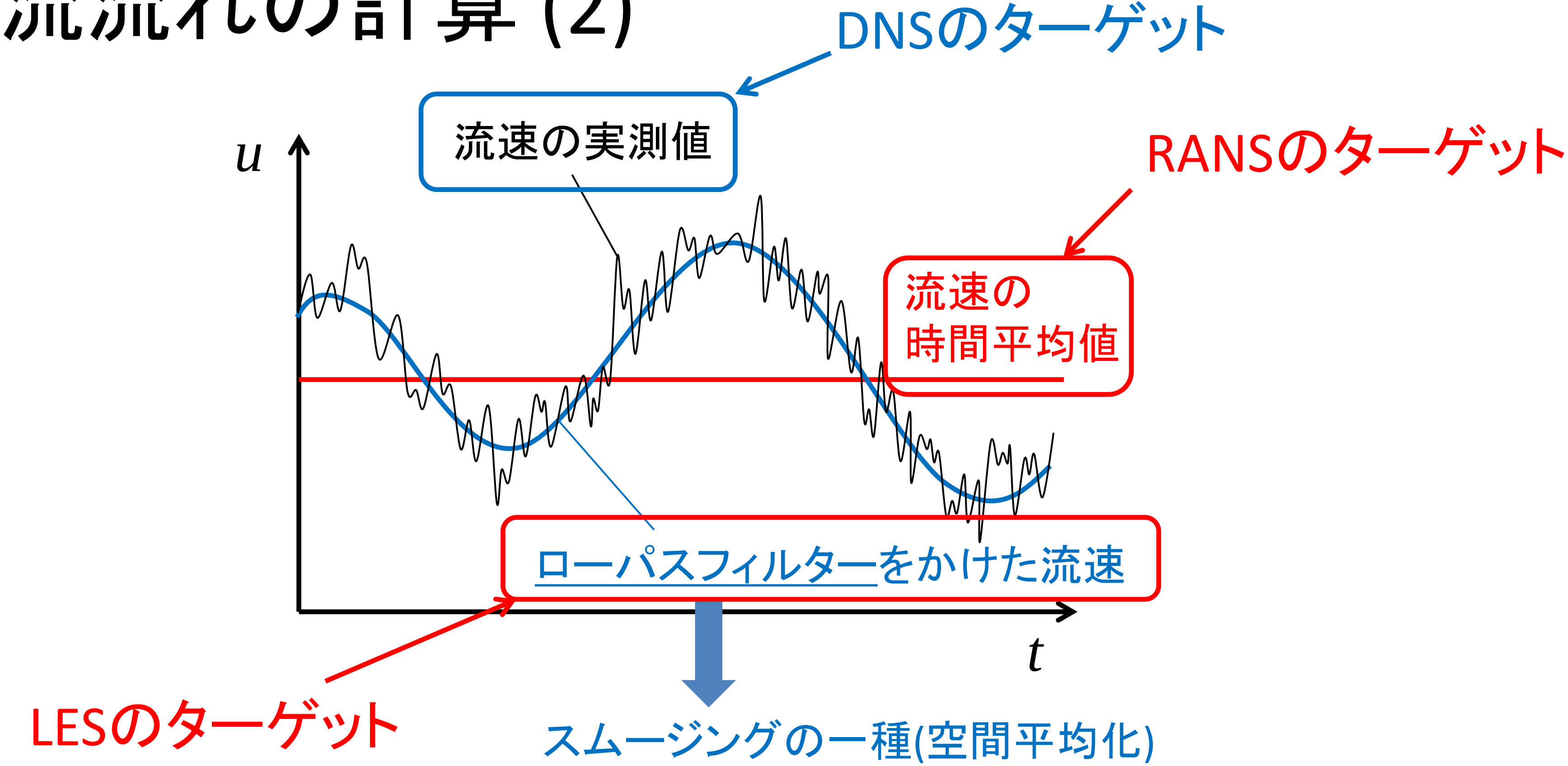
- ラージエディシミュレーション
  (Large Eddy Simulation: LES)

  設定した計算格子よりも細かい変動スケールはモデル化し、計算格子よりも大きなスケールを直接計算する方法。

- レイノルズ平均ナビエ-ストークス方程式
  (Reynolds-Averaged Navier-Stokes equation: RANS)

  乱流のすべての変動成分をモデル化し、乱流の平均流を計算する方法。

乱流流れの計算 (2)



乱流計算手法	モデル化の有無	モデル化のターゲット
DNS	×	なし
LES	○	格子より小さなスケールの乱流変動成分
RANS	○	すべての乱流変動成分

内容

- 乱流流れの計算　・・・　3.6 (p.68～69)

- レイノルズ平均ナビエ-ストークス方程式(RANS)

  ・・・　3.5 (p.64～68)

レイノルズ分解

※　流体力学の基礎(第8回)の資料より

乱流中の瞬時流体速度：$u,\ v$

$$u = \bar{u} + u'$$

$$v = \bar{v} + v'$$

時間平均を取る
という意味

平均流速　　流速の変動成分

$$\bar{u} = \frac{1}{T}\int_0^T u\,dt \qquad \bar{v} = \frac{1}{T}\int_0^T v\,dt \quad (=0)$$

また、

$$\overline{u'} = \frac{1}{T}\int_0^T u'\,dt = 0 \qquad \overline{v'} = \frac{1}{T}\int_0^T v'\,dt = 0$$

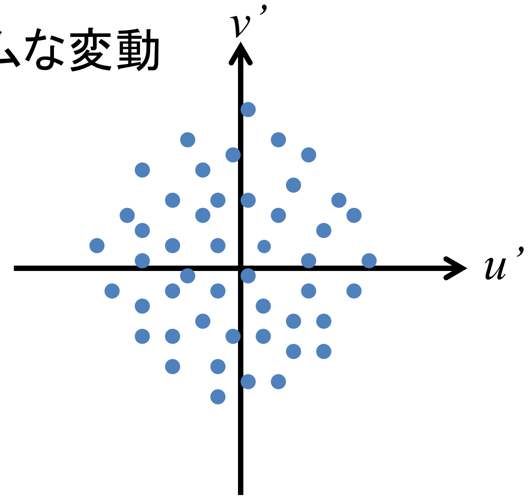
上記のように、$\phi = \bar{\phi} + \phi'$ と物理量の平均値と変動成分を分解する考え方を、**レイノルズ分解**と呼ぶ。

乱流の速度変動の性質

※　流体力学の基礎(第8回)の資料より

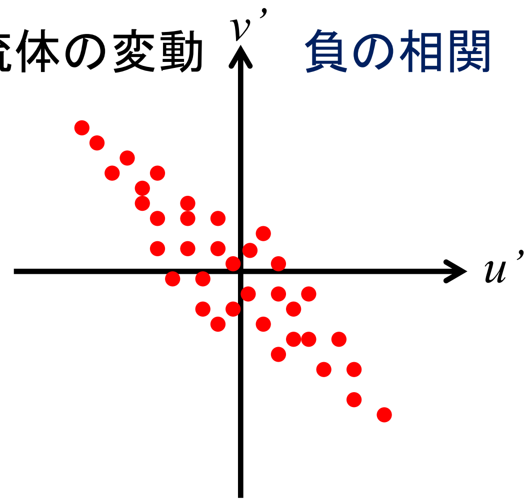
・ランダムな変動

$$\overline{u'v'} = 0$$



・実際の流体の変動

$$\overline{u'v'} \neq 0$$

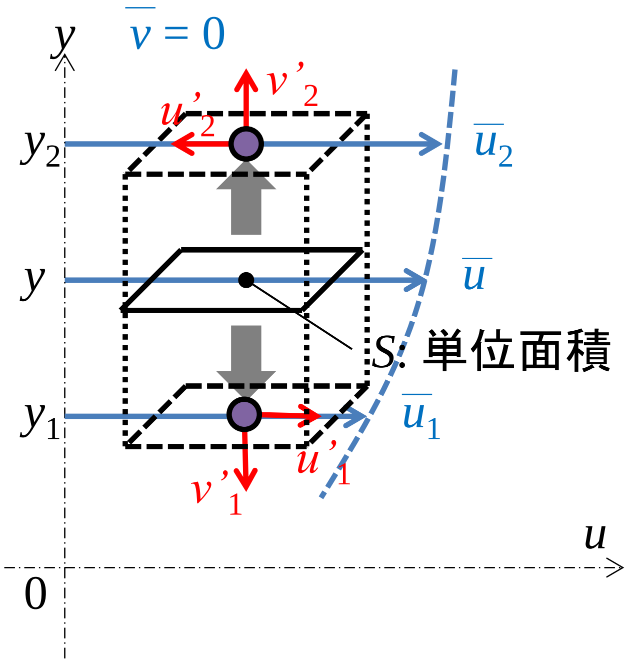


流体速度の変動成分の積(二次モーメント)は0ではない。

レイノルズ応力 (1)

※　流体力学の基礎(第8回)の資料より

y方向の流体の運動量輸送を考える(右図)。



- 流体塊が有する単位時間、単位体積当たりのx方向の運動量

$$\rho u = \rho(\overline{u} + u')$$

- 単位時間当たりにy方向に輸送される流体塊の体積

$$\Delta V = v \cdot S = (\overline{v} + v')S$$

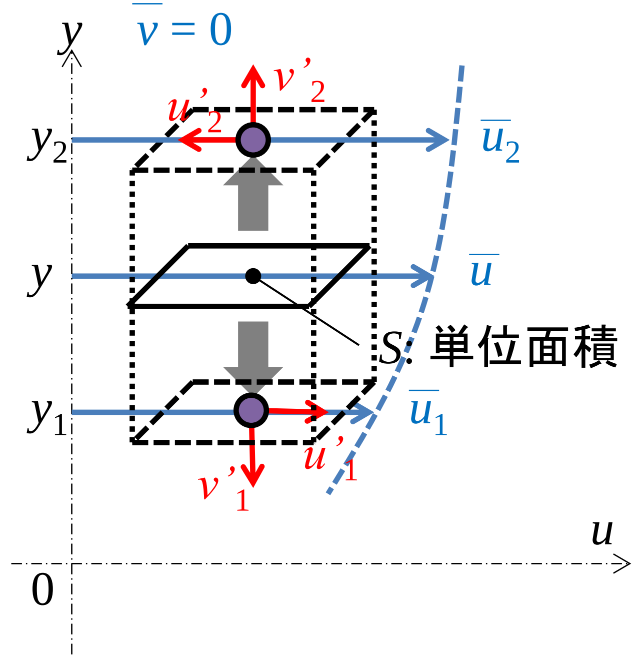
S=1、$\overline{v}$=0なので、

$$\Delta V = v'$$

レイノルズ応力 (2)

※ 流体力学の基礎(第8回)の資料より

y方向の流体の運動量輸送を考える(右図)。



- 単位時間当たりにy方向に輸送される流体塊の(x方向の)運動量

$$\rho u \Delta V = \rho(\overline{u} + u')v'$$

時間平均

$$\frac{1}{T}\int_0^T \rho u \Delta V dt = \frac{\rho}{T}\int_0^T (\overline{u} + u')v' dt$$

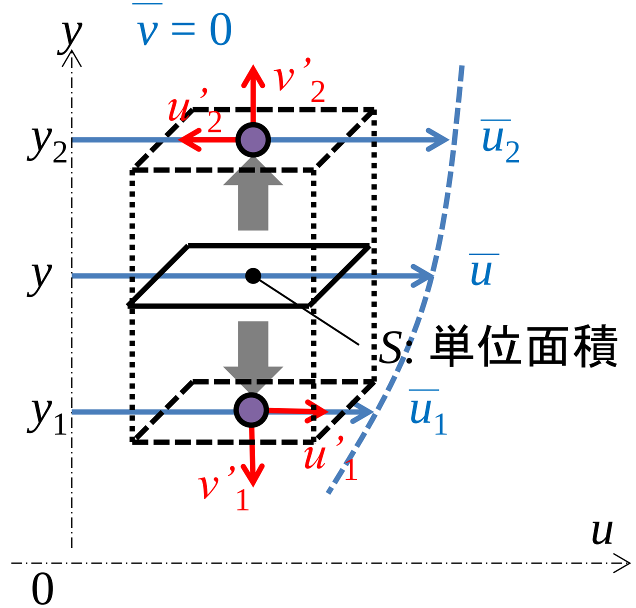
$$= \frac{\rho \overline{u}}{T}\int_0^T v' dt + \frac{\rho}{T}\int_0^T u'v' dt = \boxed{\rho \overline{u'v'}}$$

応力発生

レイノルズ応力 (3)

※ 流体力学の基礎(第8回)の資料より

- 今、y_2の面にはyの面からy方向に$v'(>0)$の速度を持つ流体塊が到達する。
- この流体塊はx方向速度が$\overline{u}$である面から、更に大きい速度$\overline{u_2}$を持つ面に移動している。
- この結果、y_2面でのx方向速度が減速し、$u_2'(<0)$の変動速度が発生する。



- つまり、互いに関連のあるu'とv'の符号は逆であるから、$u'v'$の時間平均値$\overline{u'v'}$は負である。したがって、乱流の速度変動がもたらす応力は次のように示す。

$$\boxed{\tau_{xy} = -\rho\overline{u'v'}}$$

← レイノルズ応力

レイノルズ応力 (4)

前ページでは、τ_{xy}の導出を行ったが、レイノルズ応力は応力テンソルと同様に2階テンソルを有しているので、具体的には次のように示される。

$$\begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\rho\overline{u'u'} & -\rho\overline{u'v'} & -\rho\overline{u'w'} \\ -\rho\overline{v'u'} & -\rho\overline{v'v'} & -\rho\overline{v'w'} \\ -\rho\overline{w'u'} & -\rho\overline{w'v'} & -\rho\overline{w'w'} \end{pmatrix}$$

$$-\rho\overline{u'v'} = -\rho\overline{v'u'} \text{、} -\rho\overline{u'w'} = -\rho\overline{w'u'} \text{、} -\rho\overline{v'w'} = -\rho\overline{w'v'}$$

なので、

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \text{、} \quad \tau_{xz} = \tau_{zx} \text{、} \quad \tau_{xz} = \tau_{zx}$$

つまり、レイノルズ応力は対象テンソルを取る。

交換則 (1)

ある変数(スカラー変数)φ, ψのレイノルズ分解

$$\underset{}{\varphi} = \underset{\text{平均値}}{\Phi} + \underset{\text{変動}}{\varphi'} \qquad \psi = \underset{\text{平均値}}{\Psi} + \underset{\text{変動}}{\psi'}$$

φ, ψの時間平均では、次のような関係(交換則)が成立する。

基本 : $\boxed{\overline{\Phi} = \Phi \qquad \overline{\varphi'} = \overline{\psi'} = 0}$

$$\overline{\varphi} = \overline{\Phi} + \overline{\varphi'} = \Phi + 0 = \Phi$$

加減即 : $\overline{\varphi + \psi} = \overline{\varphi} + \overline{\psi} = \Phi + \Psi$

微積分 : $\overline{\dfrac{\partial \varphi}{\partial s}} = \dfrac{\partial \overline{\varphi}}{\partial s} = \dfrac{\partial \Phi}{\partial s} \qquad \overline{\int \varphi ds} = \int \overline{\varphi} ds = \int \Phi ds$

積 : $\overline{\Phi\Psi} = \Phi\Psi \quad \boxed{\overline{\varphi'\Psi} = 0} \qquad \overline{\varphi\Psi} = \overline{(\Phi + \varphi')\Psi} = \Phi\Psi$

$$\boxed{\begin{aligned}\overline{\varphi\psi} &= \overline{(\Phi + \varphi')(\Psi + \psi')} = \overline{\Phi\Psi} + \overline{\Phi\psi'} + \overline{\varphi'\Psi} + \overline{\varphi'\psi'} \\ &= \Phi\Psi + \overline{\varphi'\psi'} \qquad \left(\overline{\varphi'\psi'} \neq 0\right)\end{aligned}}$$

交換則 (2)

ベクトル量についても前ページと同じ交換則が成立する。

あるベクトル$\boldsymbol{a}$のレイノルズ分解 $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{a}'$ とする。

ベクトル解析演算子:

$$\overline{\mathrm{div}\,\boldsymbol{a}} = \mathrm{div}\,\overline{\boldsymbol{a}} = \mathrm{div}\,\boldsymbol{A}$$

$$\overline{\mathrm{div}(\varphi\boldsymbol{a})} = \mathrm{div}\left(\overline{\varphi\boldsymbol{a}}\right) = \mathrm{div}(\Phi\boldsymbol{A}) + \mathrm{div}\left(\overline{\varphi'\boldsymbol{a}'}\right)$$

$$\overline{\mathrm{div}(\mathrm{grad}\,\varphi)} = \mathrm{div}(\mathrm{grad}\,\Phi)$$

レイノルズ平均ナビエ-ストークス方程式(RANS)の導出 (1)

直交座標系(カルテシアン座標系)における、非圧縮性流体の基礎方程式

連続の式: $\mathrm{div}\,\boldsymbol{u} = 0$

ナビエ-ストークス方程式

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \mathrm{div}(u\boldsymbol{u}) = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x} + \nu\mathrm{div}(\mathrm{grad}\,u) \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} + \mathrm{div}(v\boldsymbol{u}) = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y} + \nu\mathrm{div}(\mathrm{grad}\,v) \\ \dfrac{\partial w}{\partial t} + \mathrm{div}(w\boldsymbol{u}) = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial z} + \nu\mathrm{div}(\mathrm{grad}\,w) \end{cases}$$

$\boldsymbol{u}=(u, v, w)$: (x, y, z)方向の流速

t: 時間　ρ: 密度(定数)　p: 圧力　ν: 動粘性係数(定数)

レイノルズ平均ナビエ-ストークス方程式(RANS)の導出 (2)

$\boldsymbol{u}$=(u, v, w)、pについてレイノルズ分解をし、時間平均をとる。

<u>各変数のレイノルズ分解</u>

$$\underset{\text{平均値}}{\boldsymbol{U}} + \underset{\text{変動}}{\boldsymbol{u}'} = \boldsymbol{u} \;\Rightarrow\; \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \underset{\text{平均値}}{\begin{pmatrix} U \\ V \\ W \end{pmatrix}} + \underset{\text{変動}}{\begin{pmatrix} u' \\ v' \\ w' \end{pmatrix}}, \qquad p = \underset{\text{平均値}}{P} + \underset{\text{変動}}{p'}$$

連続の式: $\operatorname{div} \boldsymbol{U} = 0$

新たな項が発生

レイノルズ平均ナビエ-ストークス方程式(RANS)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial t} + \operatorname{div}(U\boldsymbol{U}) + \boxed{\operatorname{div}(\overline{u'\boldsymbol{u}'})} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial x} + \nu \operatorname{div}(\operatorname{grad} U) \\ \dfrac{\partial V}{\partial t} + \operatorname{div}(V\boldsymbol{U}) + \boxed{\operatorname{div}(\overline{v'\boldsymbol{u}'})} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial y} + \nu \operatorname{div}(\operatorname{grad} V) \\ \dfrac{\partial W}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathrm{W}\boldsymbol{U}) + \boxed{\operatorname{div}(\overline{w'\boldsymbol{u}'})} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial z} + \nu \operatorname{div}(\operatorname{grad} W) \end{cases}$$

レイノルズ平均ナビエ-ストークス方程式(RANS)の導出 (3)

レイノルズ応力を用いて表現すると、

連続の式: $\mathrm{div}\,\boldsymbol{U} = 0$

レイノルズ平均ナビエ-ストークス方程式(RANS)

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial U}{\partial t} + \mathrm{div}(U\boldsymbol{U}) = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial x} + \nu\mathrm{div}(\mathrm{grad}\,U) + \boxed{\dfrac{1}{\rho}\left[\dfrac{\partial}{\partial x}\tau_{xx} + \dfrac{\partial}{\partial y}\tau_{xy} + \dfrac{\partial}{\partial z}\tau_{xz}\right]} \\[2ex]
\dfrac{\partial V}{\partial t} + \mathrm{div}(V\boldsymbol{U}) = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial y} + \nu\mathrm{div}(\mathrm{grad}\,V) + \boxed{\dfrac{1}{\rho}\left[\dfrac{\partial}{\partial x}\tau_{yx} + \dfrac{\partial}{\partial y}\tau_{yy} + \dfrac{\partial}{\partial z}\tau_{yz}\right]} \\[2ex]
\dfrac{\partial W}{\partial t} + \mathrm{div}(\mathrm{W}\,\boldsymbol{U}) = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial z} + \nu\mathrm{div}(\mathrm{grad}\,W) + \boxed{\dfrac{1}{\rho}\left[\dfrac{\partial}{\partial x}\tau_{zx} + \dfrac{\partial}{\partial y}\tau_{zy} + \dfrac{\partial}{\partial z}\tau_{zz}\right]}
\end{cases}
$$

スカラー変数の輸送方程式

前ページの式に発生した項を、レイノルズ応力を用いて表現するとRANS方程式と類似の形式をとる。

ある変数(スカラー変数)φを考える。

レイノルズ分解: $\varphi = \underset{\text{平均値}}{\Phi} + \underset{\text{変動}}{\varphi'}$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \mathrm{div}(\Phi \boldsymbol{U}) = \frac{1}{\rho}\mathrm{div}(\underset{\text{拡散係数}}{\boxed{\Gamma_\Phi}}\,\mathrm{grad}\Phi) + \mathrm{div}(\overline{\varphi' \boldsymbol{u}'}) + \underset{\text{ソース項}}{\boxed{S_\Phi}}$$

圧縮性(密度変動)の考慮 (1)

これまでは、非圧縮性流体として、密度一定として、RANS方程式を取り扱ってきたが、ここからは密度変動がある場合を想定してRANS方程式を考える。

- 密度のレイノルズ分解は厳しい

密度のレイノルズ分解を考慮した連続の式

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Omega)+\mathrm{div}(\Omega\boldsymbol{U})+\boxed{\mathrm{div}(\overline{\rho'\boldsymbol{u}'})}=0$$

湧き出しの発生

密度のレイノルズ分解を考慮したナビエ-ストークス方程式

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Omega U)+\underbrace{\boxed{\frac{\partial}{\partial t}(\overline{\rho'u'})}}_{\text{取扱難}}+\mathrm{div}(\Omega U\boldsymbol{U})+\mathrm{div}(\Omega\overline{u'\boldsymbol{u}'})+\underbrace{\boxed{\mathrm{div}(\overline{\rho'u'\boldsymbol{u}'})}}_{\text{取扱難}}$$

$$=-\frac{\partial P}{\partial x}+\mu\mathrm{div}(\mathrm{grad}\,U)$$

取り扱いの難しい項が発生し、いろいろ大変。

圧縮性(密度変動)の考慮 (2)

- Morkovinの仮説

境界層流れでは主流のマッハ数が5以下、噴流ではマッハ1.5以下であれば、圧縮性による乱流構造の変化は無視でき、その範囲内であれば、ファーブル平均が使える。

- ファーブル平均(密度加重平均)

変数ξのファーブル平均

$$\tilde{\xi} = \frac{\overline{\rho \xi}}{\overline{\rho}}$$

ファーブル平均を用いることで、密度と変数の平均値の処理を分離することができる。

圧縮性流れにおけるレイノルズ平均ナビエ-ストークス方程式 (1)

連続の式: $$\frac{\partial \overline{\rho}}{\partial t} + \mathrm{div}\,\overline{\rho}\widetilde{\boldsymbol{U}} = 0$$

レイノルズ平均ナビエ-ストークス方程式(RANS)

$$\begin{cases}
\dfrac{\partial \overline{\rho}\widetilde{U}}{\partial t} + \mathrm{div}(\overline{\rho}\widetilde{U}\widetilde{\boldsymbol{U}}) = -\dfrac{\partial \widetilde{P}}{\partial x} + \mathrm{div}(\mu\,\mathrm{grad}\,\widetilde{U}) \\
\qquad - \left[\dfrac{\partial}{\partial x}(\overline{\rho}\widetilde{u'u'}) + \dfrac{\partial}{\partial y}(\overline{\rho}\widetilde{u'v'}) + \dfrac{\partial}{\partial z}(\overline{\rho}\widetilde{u'w'})\right] + S_{Mx} \\
\dfrac{\partial \overline{\rho}\widetilde{V}}{\partial t} + \mathrm{div}(\overline{\rho}\widetilde{V}\widetilde{\boldsymbol{U}}) = -\dfrac{\partial \widetilde{P}}{\partial y} + \mathrm{div}(\mu\,\mathrm{grad}\,\widetilde{V}) \\
\qquad - \left[\dfrac{\partial}{\partial x}(\overline{\rho}\widetilde{v'u'}) + \dfrac{\partial}{\partial y}(\overline{\rho}\widetilde{v'v'}) + \dfrac{\partial}{\partial z}(\overline{\rho}\widetilde{v'w'})\right] + S_{My} \\
\dfrac{\partial \overline{\rho}\widetilde{W}}{\partial t} + \mathrm{div}(\overline{\rho}\widetilde{W}\widetilde{\boldsymbol{U}}) = -\dfrac{\partial \widetilde{P}}{\partial z} + \mathrm{div}(\mu\,\mathrm{grad}\,\widetilde{W}) \\
\qquad - \left[\dfrac{\partial}{\partial x}(\overline{\rho}\widetilde{w'u'}) + \dfrac{\partial}{\partial y}(\overline{\rho}\widetilde{w'v'}) + \dfrac{\partial}{\partial z}(\overline{\rho}\widetilde{w'w'})\right] + S_{Mz}
\end{cases}$$

圧縮性流れにおけるレイノルズ平均ナビエ-ストークス方程式 (2)

スカラー変数の
輸送方程式

$$\frac{\partial \bar{\rho}\tilde{\Phi}}{\partial t} + \mathrm{div}(\bar{\rho}\tilde{\Phi}\tilde{\boldsymbol{U}}) = \mathrm{div}(\Gamma_{\Phi}\mathrm{grad}\tilde{W}) - \left[\frac{\partial}{\partial x}(\bar{\rho}\widetilde{\varphi' u'}) + \frac{\partial}{\partial y}(\bar{\rho}\widetilde{\varphi' v'}) + \frac{\partial}{\partial z}(\bar{\rho}\widetilde{\varphi' w'})\right] + S_{\Phi}$$

以上の方程式は、低マッハ数での圧縮性乱流解析でよく用いられる。

次回

日程	パート部分	ページ
2013.11	第3章：乱流とそのモデリング 担当セクション：3.7～3.7.1	p.69～75

次回は、今回できなかったところ(乱流モデルの概要と混合長理論)をやりたいと思います。引き続き、私が輪講を担当します。