～　流体力学の基礎　～
第3回
流体運動の基礎理論

OpenFOAM 勉強会 for beginner

2012年01月14日(土)

講習会のスケジュール概要 (あくまでも現時点での予定です)

OpenFOAM
勉強会
for beginner

流体力学の基礎		
第 1回目	2011.09	流体について
第 2回目	2011.10	流体静力学
第 3回目	**2012.01**	**流体運動の基礎理論1**
第 4回目	2012.02	流体運動の基礎理論2
第 5回目	2012.03	流体摩擦および境界層1
第 6回目	2012.04	流体摩擦および境界層2
第 7回目	2012.05	流体抵抗

前回のお話①

圧力の諸性質

- 圧力は静止流体中の任意の**面に対して垂直**に作用。
- 圧力は流体中で**等方的**に作用する。
- 液体中の圧力は液体の**深さに比例**する。
- **絶対圧＝大気圧＋ゲージ圧**

静止した液体が壁面に作用する力

- 壁面に作用する**平均圧力は図心(重心)に作用**する。
- 圧力中心は図心と一致しない。

前回のお話②

相対的静止状態

- 水平方向に等加速度運動している液体の加速度は、液面の傾きより求めることができる。
- 等速回転運動している液体の液面は、回転軸を中心とした放物面を形成する。

浮力(アルキメデスの原理)

- 浮力とは、液体中の物体が排除した液体体積の重量分が鉛直上向きに作用する力のこと。

今回のお話

流体運動の基礎理論

・はじめに流線にまつわる話題に少し触れます。
・その後、1次元における流体運動の基礎方程式を導出してみます。

1次元で流体運動に着目することで、流体の基本的な性質を平易に理解できます。

目次

- はじめに
- 質量保存: 連続の式
- 運動量保存: オイラーの運動方程式
- エネルギー保存: ベルヌーイの定理
- おわりに

目次

流線

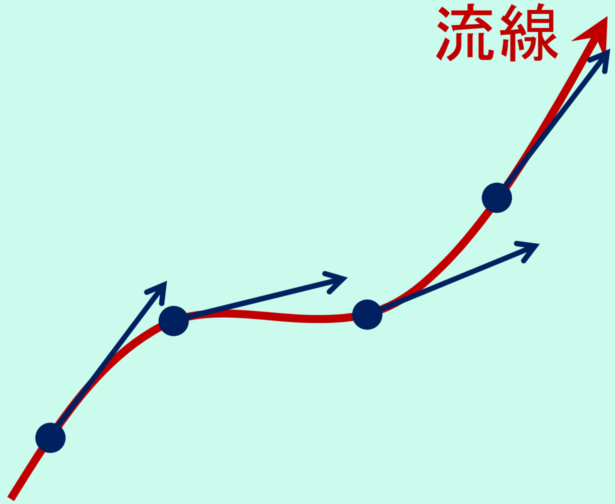
OpenFOAM
勉強会
for beginner

流線の定義

空間中に存在する曲線の接線方向が、流れの向き(速度ベクトル)と同じ場合、この曲線を「**流線**」と言う。

↓

ある瞬間に、各点の速度ベクトルに沿ってできる曲線のこと。



流線の式

流線・・・ある瞬間に、各点の速度ベクトルに沿ってできる曲線のこと。

流線の微小要素ベクトル $d\mathbf{s} = (dx, \quad dy, \quad dz)$ は、その点での速度ベクトル $\mathbf{v} = (u, \quad v, \quad w)$ と平行であるから、

$$\boxed{\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}}$$

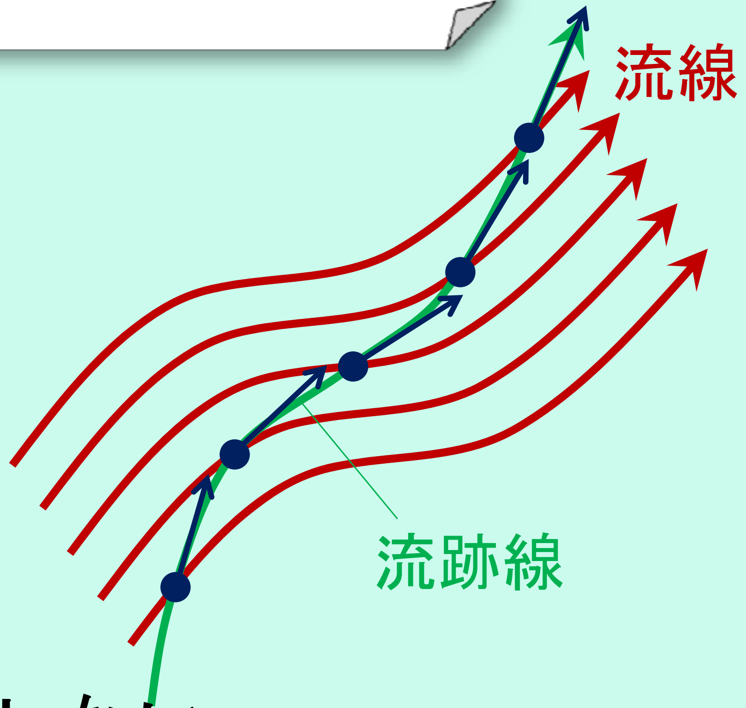
・・・ 流線の式

流跡線

OpenFOAM
勉強会
for beginner

流跡線

ある1個の粒子が流体中を飛んでいる場合、その粒子の移動経路を表す曲線を「**流跡線**」と言う。



原則、流跡線と流線は一致しない。

<u>流線と流跡線が一致する場合(以下のいずれも満たすこと)</u>

粒子の大きさや質量の影響が無視できる ⇒流体完全追従

流れの向きや大きさが時間によって変化しない ⇒定常流

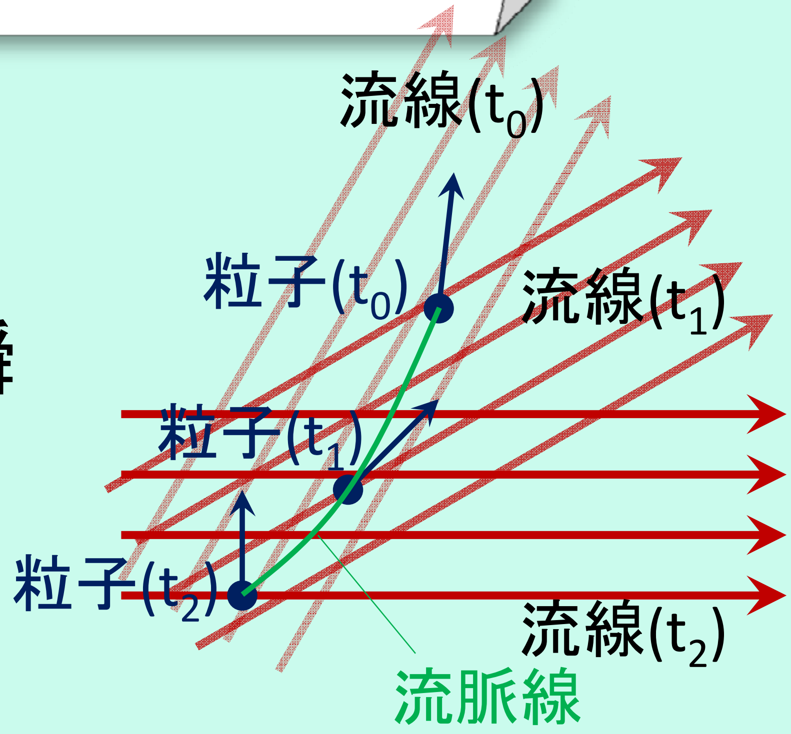
流脈線

OpenFOAM
勉強会
for beginner

流脈線

同一点から一定時間間隔に放出される粒子をある瞬間において結んだ曲線

原則、流脈線は、流線や流跡線と一致しない。



<u>流線と流跡線が一致する場合(以下のいずれかを満たすこと)</u>

粒子の大きさや質量の影響が無視できる ⇒流体完全追従

流れの向きや大きさが時間によって変化しない ⇒定常流

流線、流跡線、流脈線のまとめ

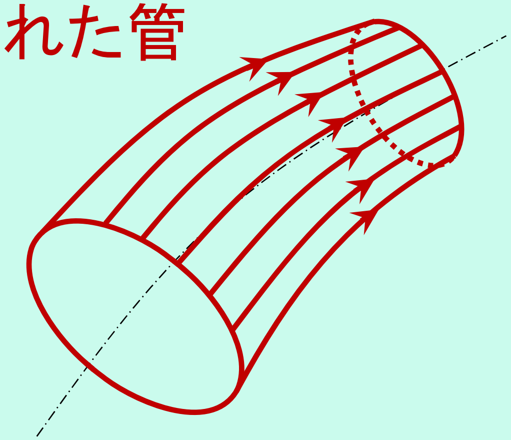
OpenFOAM
勉強会
for beginner

定常/非定常	粒子の大きさや質量の影響	流線、流跡線、流脈線の関係
定常	無	流線=流跡線=流脈線
定常	有	流跡線=流脈線
非定常	無	流跡線=流脈線
非定常	有	いずれも一致せず

※ 流れの向きや大きさが時間によって変化する⇒非定常

流管

流管の定義



流体中にある閉曲線を考え、この閉曲線を通過する流線で囲まれた流体の管を「**流管**」と言う。

⬇

流管の壁面では固体の管と同様に管壁を横切る流れは存在しない。

ここからの話

これ以降、流れの基礎方程式を導出します。
なお、方程式導出に際して次の仮定を置きます。

(1) 微小な流管要素に着目し空間的に1次元の方程式を導出します。

(2) 取り扱う流体は完全流体とします。

※完全流体とは･･･
- 非粘性流体
- 流体要素に対しては垂直応力のみ考慮
  (圧力のみ、せん断応力は考慮しない)

目次

- ・はじめに
- **・質量保存：連続の式**
- ・運動量保存: オイラーの運動方程式
- ・エネルギー保存: ベルヌーイの定理
- ・おわりに

質量保存の考え方

空間中にある体積を定義する。

定義体積内での単位時間当たりの流体質量の変化量 = 単位時間当たりに流入した流体質量 − 単位時間当たりに流出した流体質量

一般的な質量保存の考え方

$$\frac{\partial m}{\partial t} = \dot{m}_{in} - \dot{m}_{out}$$

m :流体の質量

質量保存の関係①

OpenFOAM
勉強会
for beginner

右図のように、微小長さdsの流管を考える。

単位時間当たりに
流入面より流入する流体の質量

$$\dot{m}_{in} = \rho v A \qquad (\mathrm{kg/s})$$

単位時間当たりに
流出面より流出する流体の質量

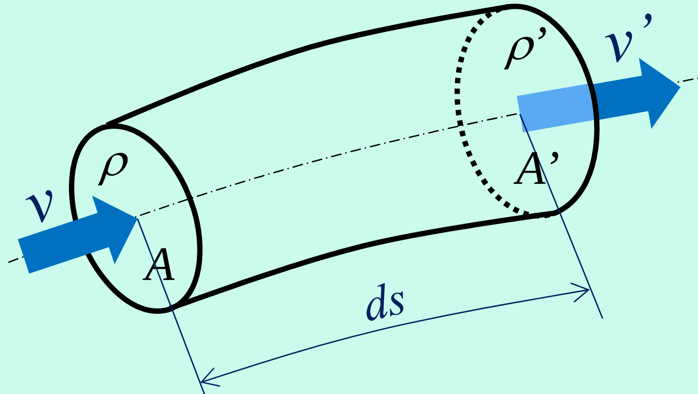
$$\dot{m}_{out} = \rho' v' A' \quad (\mathrm{kg/s})$$

流管内の流体の質量

$$m \approx \rho dV \approx \rho A ds \quad (\mathrm{kg})$$

質量保存の関係式

$$\frac{\partial m}{\partial t} = \dot{m}_{in} - \dot{m}_{out} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial}{\partial t}(\rho A ds) = \rho v A - \rho' v' A'}$$



記号の説明
流管長さ:　ds
流管体積:　$dV=Ads$

断面	流入面	流出面
流体密度	ρ	ρ'
流速	v	v'
断面積	A	A'

質量保存の関係②

質量保存の関係式

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho A ds) = \rho v A - \boxed{\rho' v' A'}$$

ρ'、v'、A'をテイラー展開を用い表現する

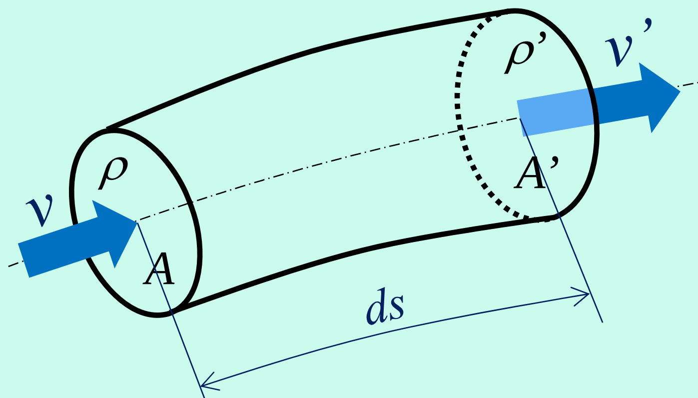
$$\rho' = \rho + \frac{\partial \rho}{\partial s} ds + \cancel{\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \rho}{\partial s^2} ds^2} + \cancel{\frac{1}{6}\frac{\partial^3 \rho}{\partial s^3} ds^3} + \cdots$$

$$v' = v + \frac{\partial v}{\partial s} ds + \cancel{\frac{1}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial s^2} ds^2} + \cancel{\frac{1}{6}\frac{\partial^3 v}{\partial s^3} ds^3} + \cdots$$

$$A' = A + \frac{\partial A}{\partial s} ds + \cancel{\frac{1}{2}\frac{\partial^2 A}{\partial s^2} ds^2} + \cancel{\frac{1}{6}\frac{\partial^3 A}{\partial s^3} ds^3} + \cdots$$

2次以上の微小量を省略すると

$$\boxed{\rho' = \rho + \frac{\partial \rho}{\partial s} ds \quad v' = v + \frac{\partial v}{\partial s} ds \quad A' = A + \frac{\partial A}{\partial s} ds}$$



記号の説明
流管長さ: ds
流管体積: $dV=Ads$

断面	流入面	流出面
流体密度	ρ	ρ'
流速	v	v'
断面積	A	A'

質量保存の関係③

OpenFOAM
勉強会
for beginner

前頁より

$$\therefore \rho' v' A' = \rho v A + \frac{\partial}{\partial s}(\rho v A)\cdot ds$$

よって、質量保存の関係式は以下のように記すことができる。

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}(\rho A) + \frac{\partial}{\partial s}(\rho v A) = 0}$$

定常流の場合、$\partial(\rho A)/\partial t = 0$ なので、

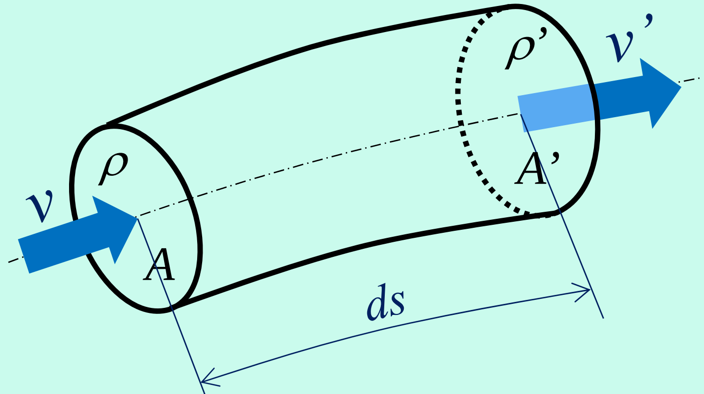
$$\boxed{\rho v A = Q_m = const.}$$

Q_m : 質量流量

さらに非圧縮性の場合、

$$\boxed{vA = Q_v = const.}$$

Q_v : 体積流量



記号の説明
流管長さ: ds
流管体積: $dV=Ads$

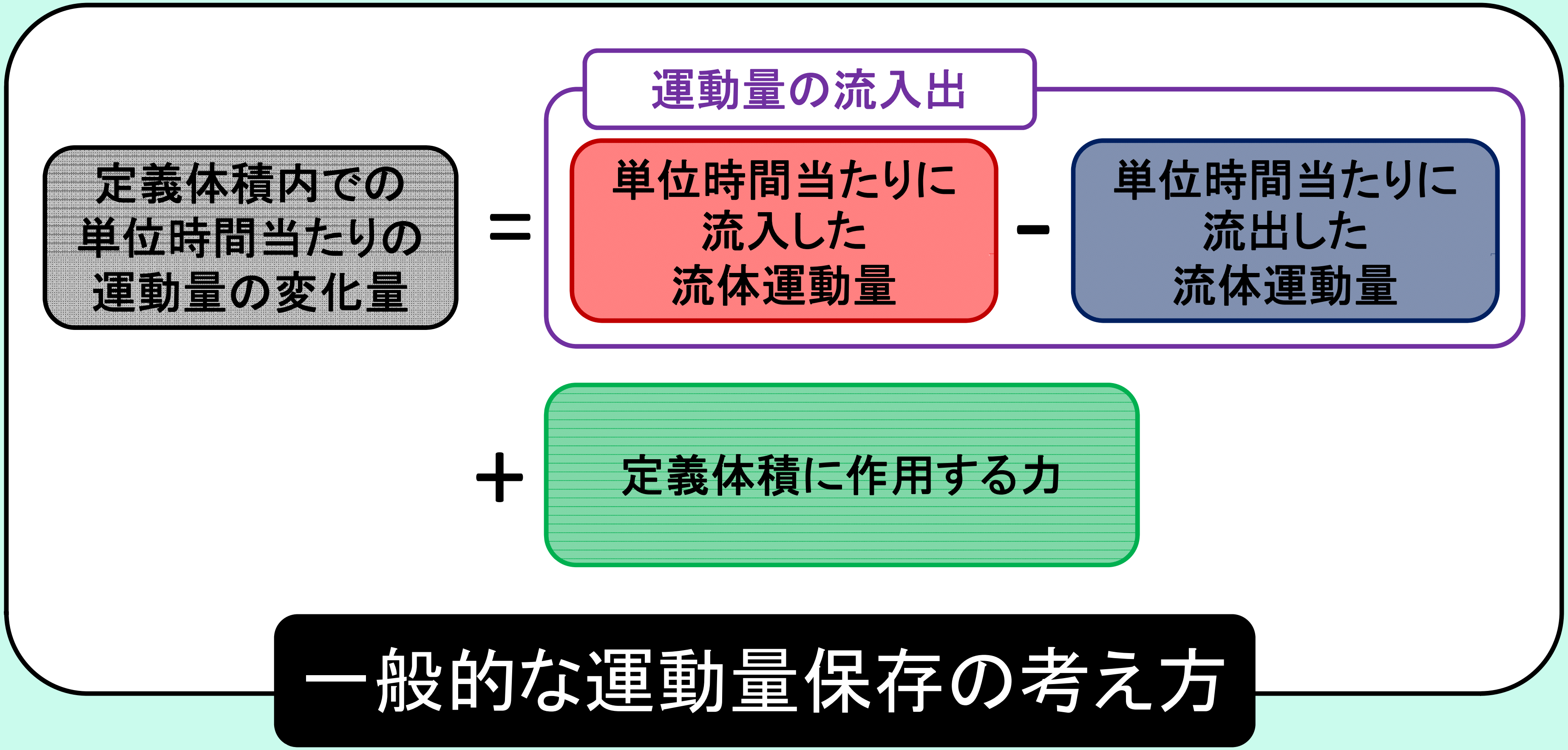
断面	流入面	流出面
流体密度	ρ	ρ'
流速	v	v'
断面積	A	A'

以上、□で囲った式を「**質量保存式**」あるいは「**連続の式**」と呼ぶ。

目次

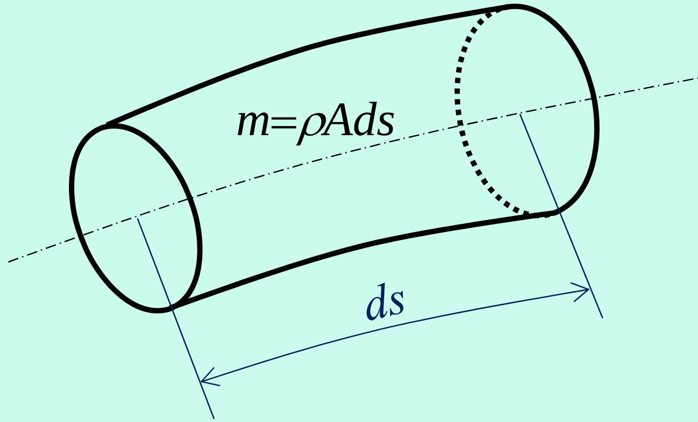
運動量保存の考え方

空間中にある体積を定義する。



運動量保存：運動量と力の釣合い

右図のように、微小長さdsの流管を考える。



微小要素における単位時間当たりの
運動量の変化量

$$\frac{\partial}{\partial t}(mv)=\frac{\partial}{\partial t}(\rho v A ds)$$

また、運動量の時間微分は力である。

$$\frac{\partial}{\partial t}(mv)=F$$

よって $\partial(mv)/\partial t = \cdots$ で式をまとめる場合は、運動量の流入出の収支のほか、瞬時の力の釣合いを考慮しなければならない。

運動量保存:運動量の流入出の収支

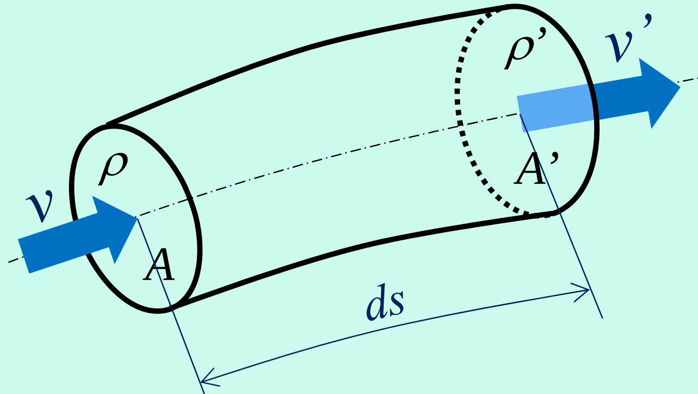
OpenFOAM
勉強会
for beginner

単位時間当たりに
流入面より流入する流体の運動量

$$\dot{f}_{in} = (\rho v A)\cdot v = \rho v^2 A$$

単位時間当たりに
流出面より流出する流体の運動量

$$\dot{f}_{out} = (\rho' v' A')\cdot v' = \rho' v'^2 A'$$



記号の説明
流管長さ: ds
流管体積: $dV=Ads$

断面	流入面	流出面
流体密度	ρ	ρ'
流速	v	v'
断面積	A	A'

$$\rho' = \rho + \frac{\partial \rho}{\partial s}ds \quad v' = v + \frac{\partial v}{\partial s}ds \quad A' = A + \frac{\partial A}{\partial s}ds$$

よって、

$$\dot{f}_{in} - \dot{f}_{out} = -\frac{\partial}{\partial s}(\rho v^2 A ds)$$

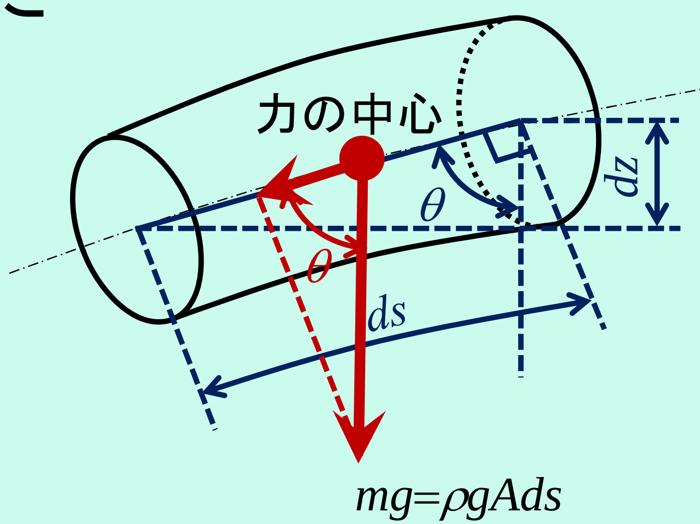
運動量保存:
力の釣合い(重力の影響)

右図より、重力が流れに沿った方向に作用する力を求めると、

$$F^g = -mg \cdot \cos\theta = -\rho g A ds \cdot \cos\theta$$

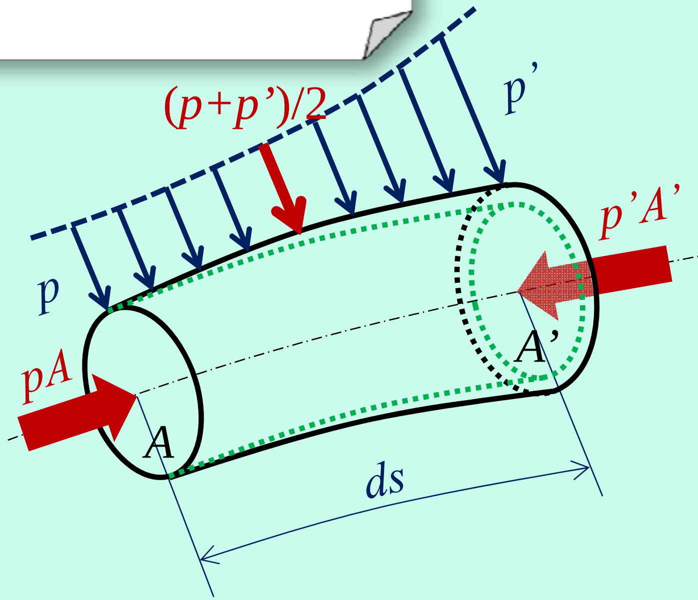
$$\cos\theta = \frac{\partial z}{\partial s}$$

$$\boxed{\therefore F^g = -\rho g A \frac{\partial z}{\partial s} ds}$$



運動量保存：力の釣合い(圧力の影響)

OpenFOAM
勉強会
for beginner



右図より、

圧力により流入面に作用する力は、

$$F_{in}^{p} = pA$$

圧力により流出面に作用する力は、

$$F_{out}^{p} = p'A' = pA + \frac{\partial}{\partial s}(pA)ds$$

圧力により側面に働く力のうち、
流れ方向の分力は、

$$F_{side}^{p} = \frac{1}{2}(p + p')(A' - A) = p\frac{\partial A}{\partial s}ds$$

よって、

$$\boxed{F^{p} = F_{in}^{p} - F_{out}^{p} + F_{side}^{p} = -\frac{\partial p}{\partial s}Ads}$$

運動量保存：オイラーの運動方程式①

以上より、微小流管の運動量保存の関係式は、

$$\frac{\partial}{\partial t}(mv) = \frac{\partial}{\partial t}(\rho vAds) = \underbrace{(\dot{f}_{in} - \dot{f}_{out})}_{\text{運動量の流入出の収支}} + \underbrace{F^g}_{\text{重力により発生した力}} + \underbrace{F^p}_{\text{圧力により発生した力}}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho vAds) = -\frac{\partial}{\partial s}(\rho v^2 Ads) - \rho gA\frac{\partial z}{\partial s}ds - \frac{\partial p}{\partial s}Ads$$

オイラーの運動方程式

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}(\rho vA) + \frac{\partial}{\partial s}(\rho v^2 A) = -\rho gA\frac{\partial z}{\partial s} - A\frac{\partial p}{\partial s}}$$

運動量保存:オイラーの運動方程式②

OpenFOAM
勉強会
for beginner

Aが任意定数の場合、

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}(\rho v)+\frac{\partial}{\partial s}(\rho v^2)=-\rho g\frac{\partial z}{\partial s}-\frac{\partial p}{\partial s}}$$

質量保存を考慮すると、上式は次のようになる。

$$\boxed{\frac{\partial v}{\partial t}+v\frac{\partial v}{\partial s}=-g\frac{\partial z}{\partial s}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s}}$$

定常流の場合、

$$\frac{1}{\rho}\frac{dp}{ds}+v\frac{dv}{ds}+g\frac{dz}{ds}=0$$

$$\boxed{\therefore \frac{1}{\rho g}\frac{dp}{ds}+\frac{1}{2g}\frac{dv^2}{ds}+\frac{dz}{ds}=0}$$

目次

OpenFOAM
勉強会
for beginner

ベルヌーイの定理

OpenFOAM
勉強会
for beginner

定常流のオイラーの運動方程式

$$\therefore \frac{1}{\rho g}\frac{dp}{ds}+\frac{1}{2g}\frac{dv^2}{ds}+\frac{dz}{ds}=0$$

この式をsで積分すると次のような式が得られる。

$$\boxed{\therefore \frac{p}{\rho g}+\frac{v^2}{2g}+z=const.}$$

上式の関係を「ベルヌーイの定理」と呼び、
定常、非粘性流体における「エネルギー不滅の法則」
を表している。

ベルヌーイの定理が示すエネルギー保存

OpenFOAM
勉強会
for beginner

ベルヌーイの定理

$$\frac{p}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} + z = const. \qquad (単位:m)$$

これに$\rho g Q_v$を掛ける(Q_v:体積流量)

$$\underbrace{pQ_v}_{\text{圧力エネルギー}} + \underbrace{\frac{1}{2}\rho Q_v v^2}_{\text{運動エネルギー}} + \underbrace{\rho Q_v g z}_{\text{位置エネルギー}} = const. \qquad (単位:J/s)$$

<u>ベルヌーイの定理</u>とは ⇒

圧力、運動および位置エネルギー間の保存関係を記述

ヘッド(水頭)

ベルヌーイの定理

$$\underbrace{\frac{p}{\rho g}}_{\text{圧力エネルギーに対応}} + \underbrace{\frac{v^2}{2g}}_{\text{運動エネルギーに対応}} + \underbrace{z}_{\text{位置エネルギーに対応}} = const.$$

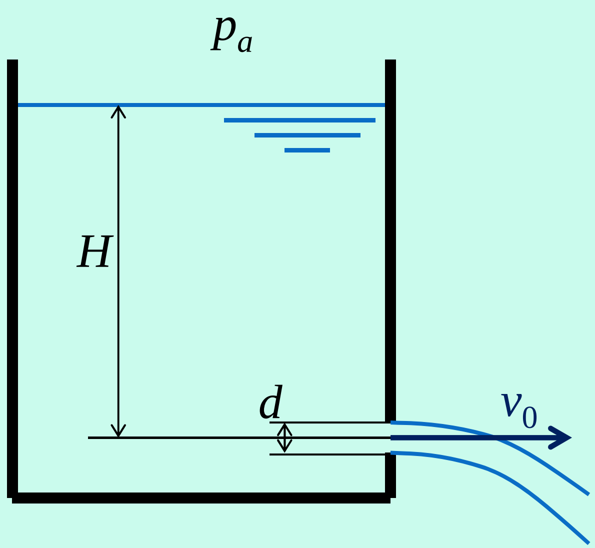
(単位:m)

上式に示すベルヌーイの定理は、圧力、運動および位置エネルギーの関係を長さの単位に換算し示している。

上式の左辺第1項を圧力ヘッド、第2項を速度ヘッドおよび第3項を位置ヘッドと呼ぶ。

例題：トリチェリの原理

右図のように穴のあいた容器に液体を入れた。
穴は円形で直径dである。
穴の中心位置を0としたとき、液面がHの位置にあるとすれば、穴から出る水の速さv_0はどのように記述できるか。
なお、大気圧はp_a、重力加速度はg、液体の密度はρとおく。



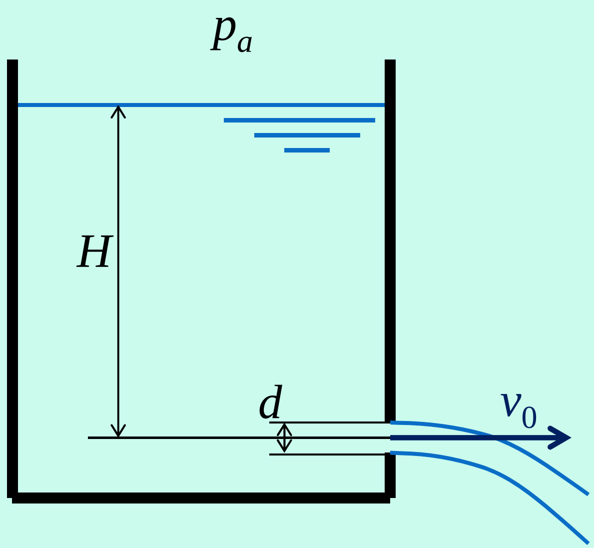
例題:トリチェリの原理(回答)

OpenFOAM
勉強会
for beginner

ベルヌーイの定理より

$$\frac{p_a}{\rho g} + H = \frac{p_a}{\rho g} + \frac{v_0^2}{2g}$$

$$\therefore v_0 = \sqrt{2gH}$$



流出する液体の速さは、液体の密度や穴の直径に依存しない。

まとめ

・流線、流跡線および流脈線について、それぞれ異なることを説明した。

・質量保存の関係式として「連続の式」を導出した。

・運動量保存の関係式として「オイラーの運動方程式」を導出した。

・エネルギー保存の関係式として、「ベルヌーイの定理」を導出した。

次回の予告

次回の流体力学の基礎では、
「流体運動の基礎理論2」と題して講習会を行います。

次回もOpenFOAM勉強会for beginnerの中で行いたいと思います。

本日は、講習会「流体力学の基礎」に
お付き合い頂きありがとうございました。