

# 非線形解析のための継続法



**Code\_Aster, Salome-Meca course material**

GNU FDL licence (<http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html>)

# 概要

- ▶ 継続法の定義
- ▶ 継続法の理論的要素
- ▶ 継続法を用いた非線形問題の解法
- ▶ *Code\_Aster* における継続法の使用方法

# 継続法の定義

# 継続法- なぜ必要か？

## ▶ 非線形問題の定義:

- 未知: 変位, 境界条件でのラグランジュ乗数, 温度, 圧力, 応力と内部変数
- 荷重: 変位 (Dirichlet条件), 力 (Neumann条件), 接触/摩擦
- パラメーター化:  $t$  は実時間ではない (準静的問題)

## ▶ 一般的な非線形問題の種類

- 全ての外力と変位は**既知**でユーザーのモデル化の仮定によって定義される
- 外力と変位の一部は**未知**: 方向, 作用する場所が**既知**, 強さが**未知** -> 継続法
- 外力と変位は**既知**でユーザーのモデル化の仮定によって定義される

# 継続法 – なぜ必要か？

## ▶ 非線形問題の計算: 計算方法を理解！

- 方程式: 平衡則と構成則
- 境界条件
- 唯一の解 ->  $n$  個の方程式,  $n$  個の未知数

## ▶ 非線形問題の計算: 計算方法を選択！

- 計算式からの複数解:  $n$  個の方程式,  $m$  個の未知数 ( $m > n$  の場合)
- モデルの不完全性からの複数解:  $n$  個の方程式,  $m$  個の未知数 ( $m > n$  の場合)

# 継続法 – なぜ必要か？

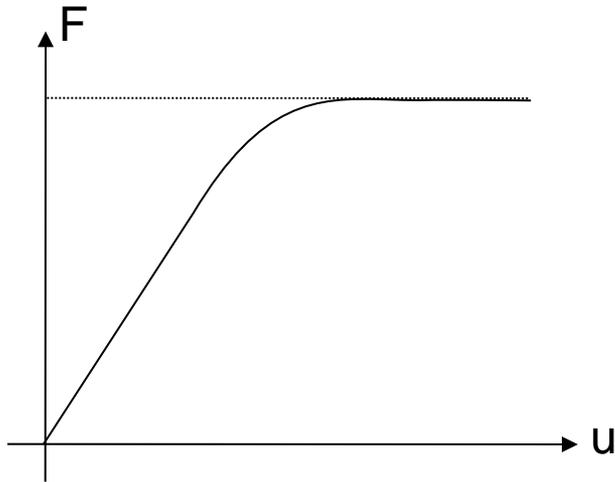
## ▶ 計算から複数解をもつ場合

- 構成則から. 劣化, 損傷, 地盤力学などの非線形条件:  
`ENDO_FRAGILE, ENDO_ISOT_BETON, ENDO_ORTH_BETON, CZM_EXP, ROUSSELIER, V`  
`ENDOCHAB, ...`
- 平衡則から: 座屈, 構造的不安定性
- クーロン摩擦から

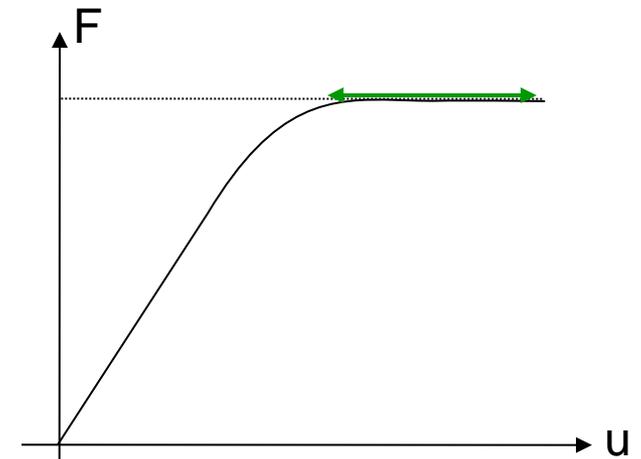
## ▶ 定義から複数解をもつ場合

- 剛体移動
- 部分的に未知の荷重: 方向, 作用する場所が **既知**, 強さが **未知**

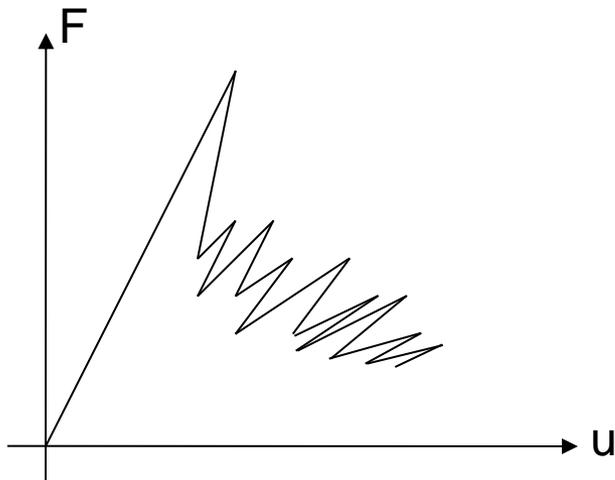
# 継続法



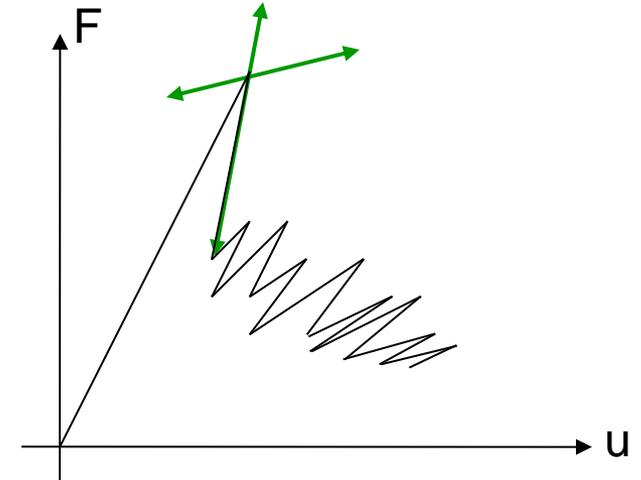
完全塑性の挙動



水平な接線マトリックス:  
一種類 (勾配の消失)

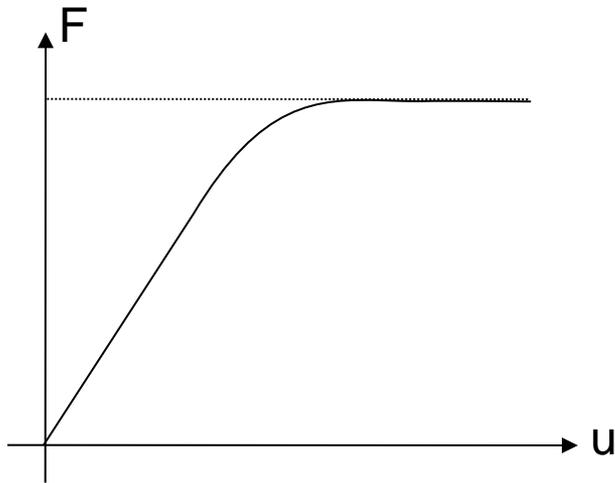


損傷があるときの挙動  
(剛性の消失)

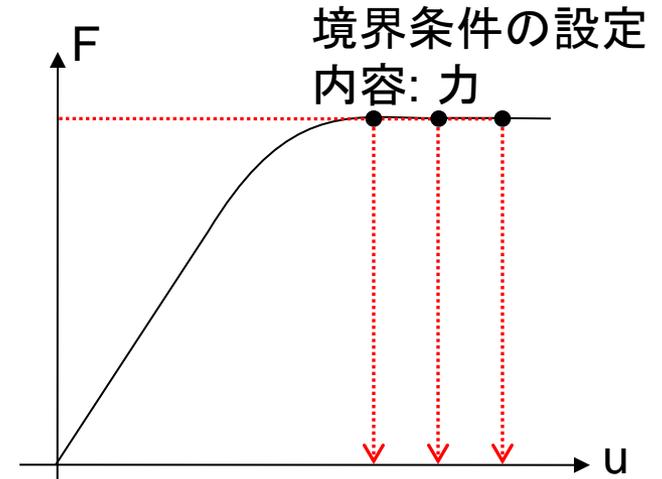


複数の接線マトリックス:  
激しい勾配の変化

# 継続法

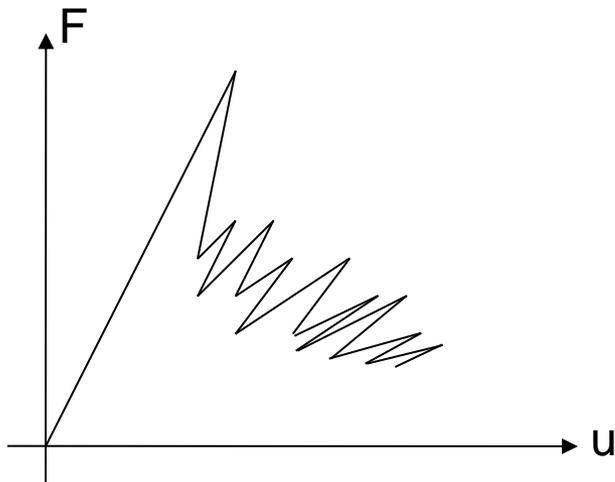


完全塑性の挙動

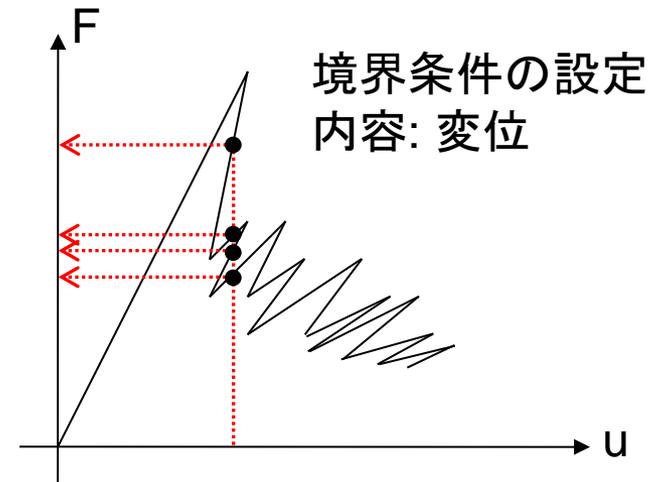


境界条件の設定  
内容: 力

多重性: 一つの力 ->  
複数の変位



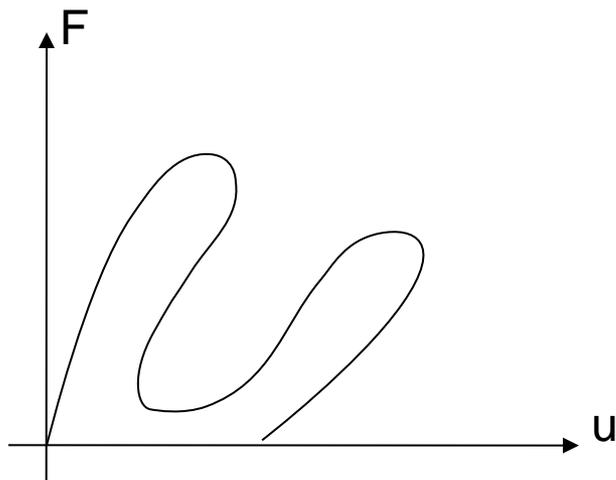
損傷があるときの挙動  
(剛性の消失)



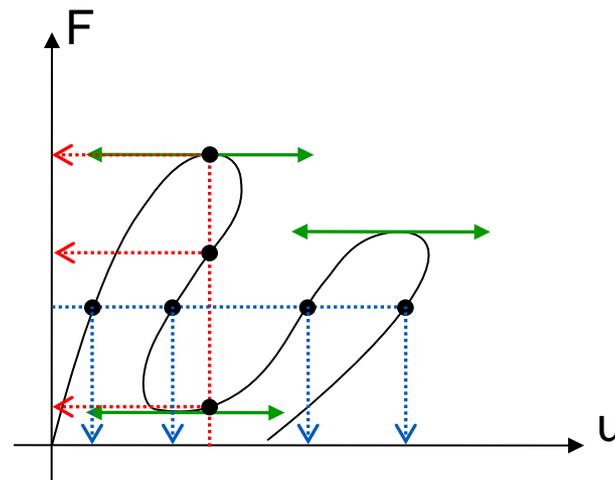
境界条件の設定  
内容: 変位

多重性: 一つの変位 ->  
複数の力

# 継続法



飛び移り  
(シエル)



境界条件の設定: 力

✚ 複数解: 一つの力  $\rightarrow$   
複数の変位

境界条件の設定: 変位

✚ 複数解: 一つの変位  $\rightarrow$   
複数の力

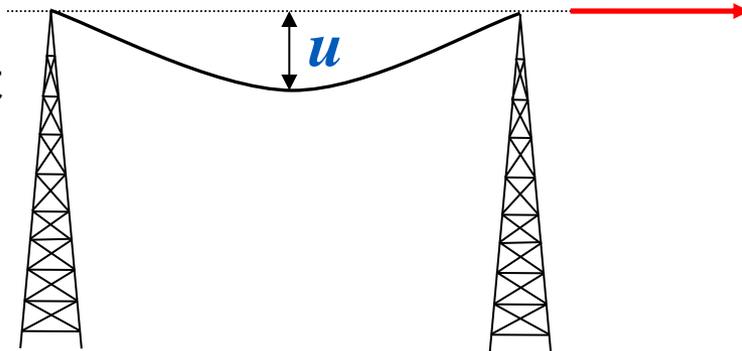
✚ 水平な接線マトリックス:  
特異性 (勾配の消失)

# 継続法

## ▶ 定義から複数解をもつ場合

- 剛体移動: (弱い)スプリングによる固定, 接触しているならCONTACT\_INIT, 動的解析
- 部分的に未知の荷重: 方向, 作用する場所が既知, 強さが未知

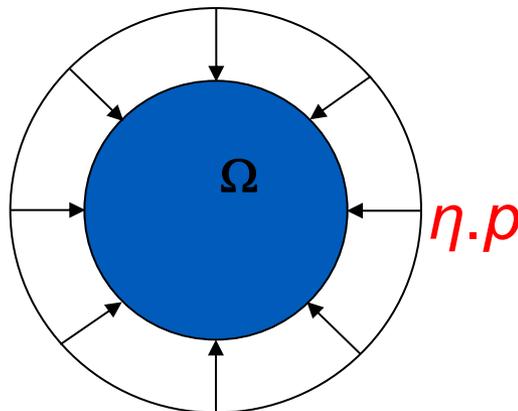
未知荷重または  
変位(強さ)



$\eta \cdot F$

- 目的:  $u$
- パラメータ: 力の強さ  $\eta$
- 力の方向: 既知!

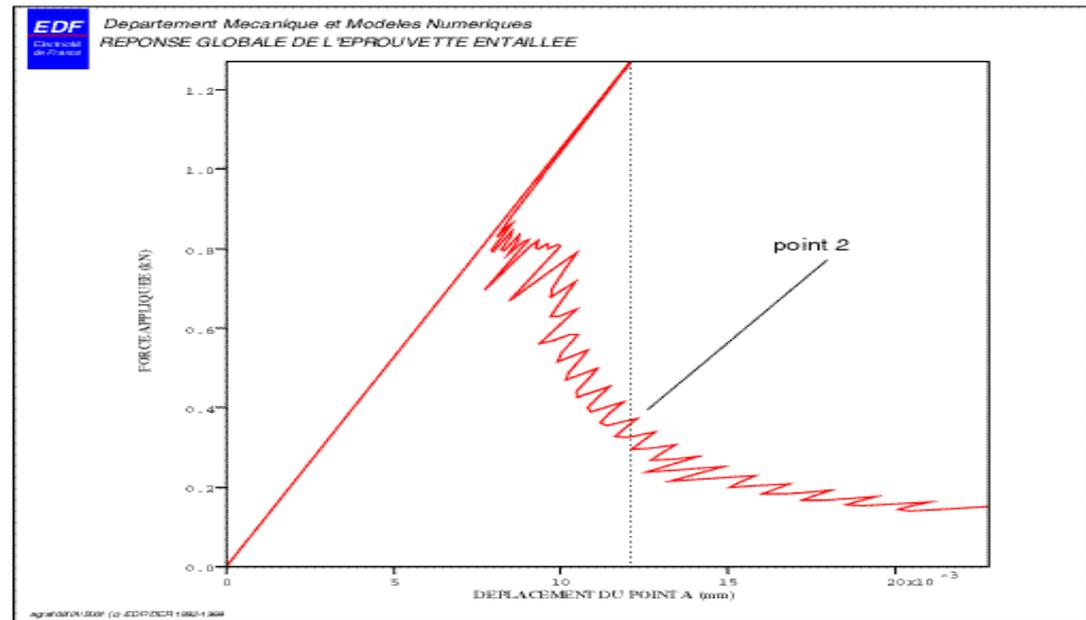
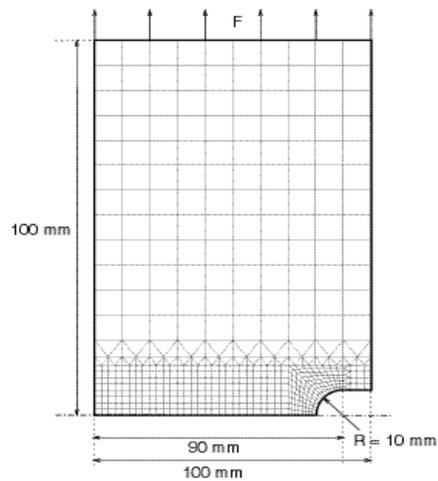
降伏点解析  
(極限解析)



- 目的: 領域  $\Omega$  の全体での塑性
- パラメータ: 圧力の強さ  $\eta$
- 降伏点解析

# 継続法

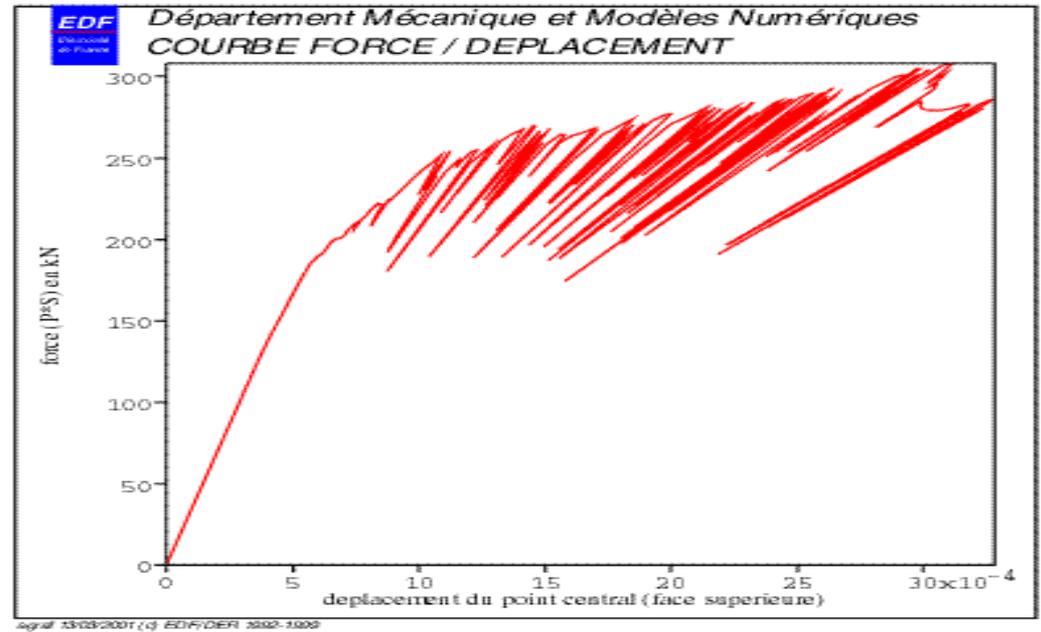
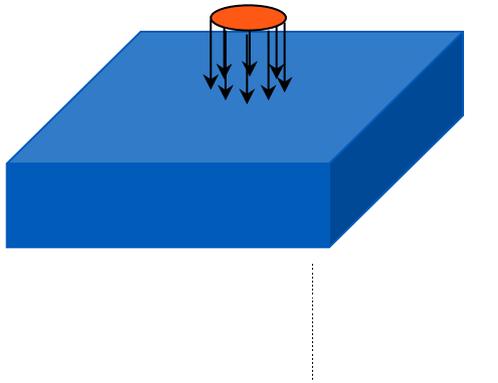
## ▶ 事例 1



壊れやすい損傷 ([ENDO\\_SCALAIRE](#))

# 継続法

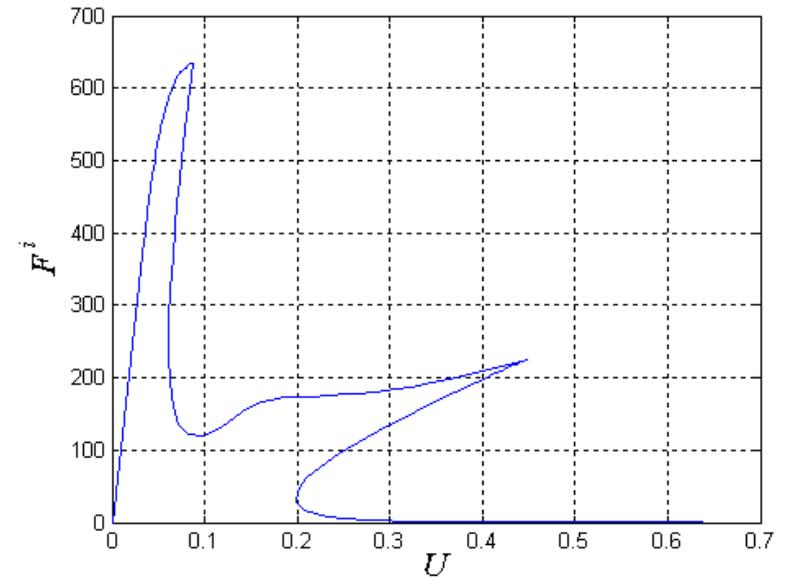
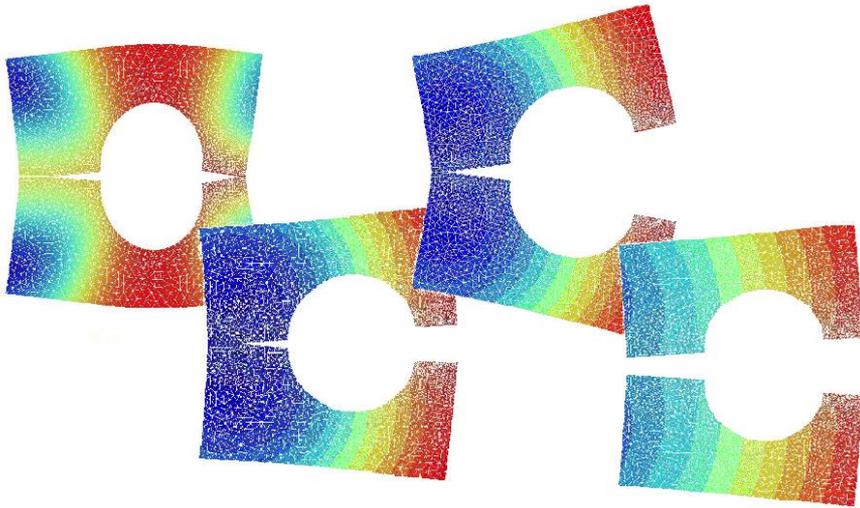
## ▶ 事例 2



損傷のあるコンクリートへの衝撃 ([ENDO\\_ORTH\\_BETON](#))

# 継続法

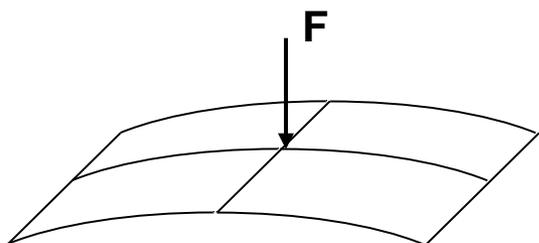
## ▶ 事例 3



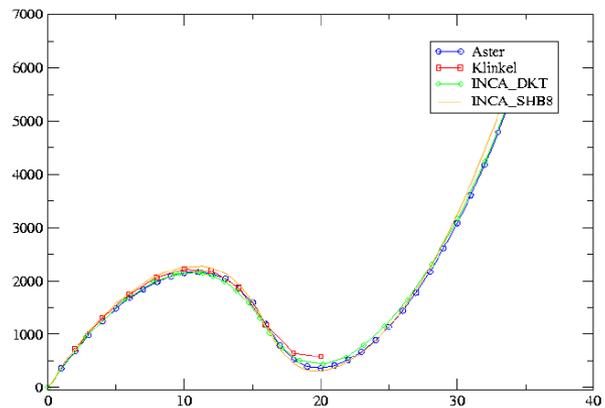
粘着ゾーンモデル (CZM)

# 継続法

## ▶ 事例 4



SSNS101B : comparaisons Aster - Inca - ref[2]



シェルの座屈

# 継続法による非線形問題の解法

# 継続法による非線形問題の解法

- ▶ 境界条件:変位と力の 既知 と 未知 の部分

$$\begin{cases} \{L^{ext}\} = \{L_{impo}^{ext}\} + \eta \cdot \{L_{pilo}^{ext}\} \\ \{u^d\} = \{u_{impo}^d\} + \eta \cdot \{u_{pilo}^d\} \end{cases}$$

- ▶ 新しい未知数  $\eta \Rightarrow$  新しい方程式

$$P(\{u\}) = \Delta\tau$$

# 継続法による非線形問題の解法

- ▶ つり合い方程式へのニュートン法 :

$$[K] \cdot \{\delta u\} = \{L_{impo}^{ext}\} + \eta \cdot \{L_{pilo}^{ext}\} - \{L^{int}\}$$

- ▶ 線形継続方程式での解法  $\Rightarrow$  分離解法

$$\{\delta u\} = \{\delta u_{impo}\} + \eta \cdot \{\delta u_{pilo}\}$$

- ▶ 2つの式での解法 (独立解法)

$$\{\delta u_{impo}\} = [K]^{-1} \cdot (\{L_{impo}^{ext}\} - \{L^{int}\})$$

$$\{\delta u_{pilo}\} = [K]^{-1} \cdot (\{L_{pilo}^{ext}\} - \{L^{int}\})$$

# 継続法による非線形問題の解法

## ▶ 継続の方程式:

- 変位, ひずみまたは応力から生じる
- 計算しやすいのが必須 (線形, 二次の形式)
- 1個だけパラメータを使う

## ▶ 継続法での目的関数のリスト

- 自由度: `DDL_IMPO`
- 変位のノルム: `LONG_ARC`
- 変位ジャンプ: `SAUT_IMPO` (XFEM)
- 変位ジャンプのノルム: `SAUT_LONG_ARC` (XFEM)
- 外力の仕事 (降伏点解析): `ANA_LIM`
- ひずみ増分: `DEFORMATION`
- 弾性予測: `PRED_ELAS`

# 継続法による非線形問題の解法

▶ 自由度による継続(DDL\_IMPO)

▶ 方程式

$$P(\{\Delta u\}) = \Delta u^{dof} = \frac{\Delta t}{C}$$

▶ 使用ルール:

- 制御される変位増分は **1個の** 自由度に対する
- 制御される節点は移動に対して重要なところに置く
- C はユーザーが `STAT_NON_LINE` で設定する定数



適切な目的: 節点 A の既知の垂直変位に対する  $\eta$  を求める

不適切な目的: 節点 B の既知の垂直変位に対する  $\eta$  を求める

**B は動かない!**

# 継続法による非線形問題の解法

▶ 変位のノルム による継続(**LONG\_ARC**) – 拡張RIKS法 (弧長増分法)

▶ 方程式

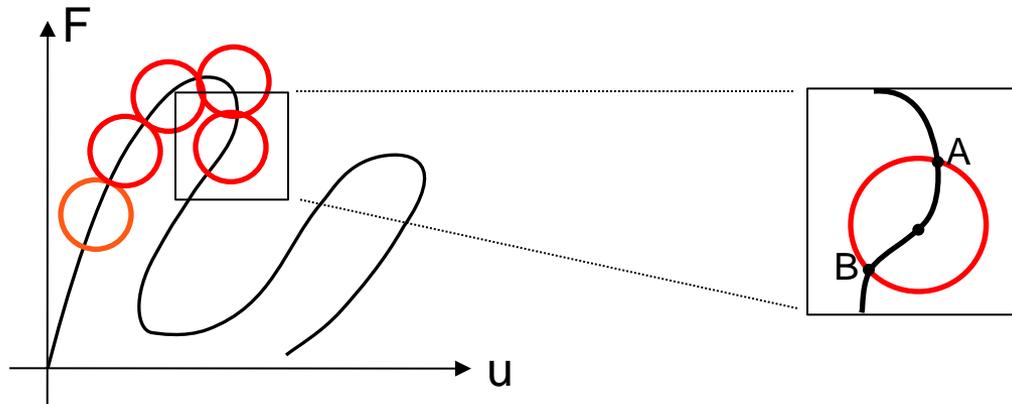
$$P(\{\Delta u\}) = \|\Delta u\| = \frac{\Delta t}{C}$$

▶ 使用ルール:

- 制御された変位増分の ノルムは **複数の** 節点で **複数の** 自由度に対する
- 制御される節点は移動に対して重要なところに置く
- C はユーザーが **STAT\_NON\_LINE** で設定する定数
- 結果の方程式は二次式で, 二つの解 -> 必ず判定基準を選ぶ **RESIDU**, **ANGL\_INCR\_DEPL**, **NORM\_INCR\_DEPL** (ドキュメントを参照)

# 継続法による非線形問題の解法

- ▶ 変位のノルム による継続(LONG\_ARC) – 拡張RIKS法 (弧長増分法)



弧長: 荷重経路に沿って連続する円を構築  
(例えば, 飛び移りなどの)複雑な経路に非常に有効

# 継続法による非線形問題の解法

▶ 外力の仕事による継続(**ANA\_LIM**) – 降伏点解析(極限解析)

▶ 方程式

$$P(\{\Delta u\}) = \int_{\Omega} f \cdot v \cdot d\Omega + \int_{\Gamma_g} g \cdot v \cdot d\Gamma = 1$$

▶ 使用ルール:

- 目的: 外力の仕事(体積力と表面力)を1にする
- Von Misesの降伏条件:  $\varphi(\sigma) = J_2(\sigma) - \sigma_y$
- 領域の全ての点は以下の式を満たす:  $\varphi(\sigma) = 0$
- 弾塑性構成則: 等時(isochronous)な要素 (**AFFE\_MODELE** での **3D\_INCO**), NORTON-HORF の構成則である必要

# 継続法による非線形問題の解法

## ▶ 外力の仕事による継続(ANA\_LIM) – 降伏点解析(極限解析)

- 塑性 ⇒ 非圧縮性：特殊な要素が必要

```
MO=AFPE_MODELE (MAILLAGE=MA,  
                AFPE=_F (TOUT = 'OUI',  
                        PHENOMENE = 'MECANIQUE',  
                        MODELISATION = '3D_INCO',)
```

- 完全塑性：等方線形硬化が必要

```
MATE =DEFI_MATERIAU ( ECRO_LINE=_F (SY=100,  
                                   D_SIGM_EPSI = 0) )
```

# 継続法による非線形問題の解法

## ▶ 外力の仕事による継続(ANA\_LIM) – 降伏点解析(極限解析)

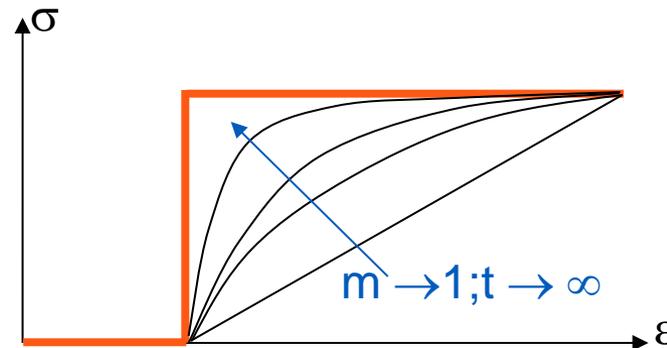
- 微分不可な関数  $\pi$ : NORTON\_HOFF  $\pi^{NH}$  による正規化が必要

$$\pi^{NH} = \frac{k^{1-m}}{m} \cdot \pi(\varepsilon)^m \quad \text{COMP\_INCR} = \_F(\text{RELATION} = \text{'NORTON\_HOFF'}), )$$

- 正規化パラメータ  $m$  は時間  $t$  で制御される

$$m = 1 + 10^{(1-t)}$$

- $m$  が 1 に近づくと, **完全**塑性に近づく



# 継続法による非線形問題の解法

## ◆ ひずみ増分による継続 (DEFORMATION)

### ◆ 方程式

$$P(\{u\}) = \underset{gauss}{Max} \left( \frac{\langle \varepsilon_{i-1}^g \rangle}{\| \langle \varepsilon_{i-1}^g \rangle \|} \cdot \{ \Delta \varepsilon^g \} \right) = \frac{\Delta t}{C}$$

$\{ \varepsilon_{i-1}^g \}$  前のステップでのひずみ

$\{ \Delta \varepsilon^g \}$  現在のステップでのひずみ増分

## ◆ 使用ルール

- ひずみが増える点が少なくとも1つ必要
- 可塑性状態の兆候なし
- 変形状態のレファレンスの状態が必要 (  $\| \{ \varepsilon_{i-1}^g \} \| \neq 0$  ) : 最初に継続法を使わないで計算して、レファレンスの状態を求める
- 結果の方程式は二つの解 -> 必ず基準を選ぶ **RESIDU**, **ANGL\_INCR\_DEPL**, **NORM\_INCR\_DEPL** (ドキュメントを参照)

# 継続法による非線形問題の解法

▶ 弾性予測による継続(PRED\_ELAS)

▶ 方程式

$$P(\{u\}) = \underset{gauss}{Max}(\varphi(\{\varepsilon_{i-1}^g\} + \{\Delta\varepsilon^g\})) = \frac{\Delta t}{C} \quad \text{or} \quad P(\{u\}) = \underset{gauss}{Max}(\varphi(\{d_{i-1}^g\} + \{\Delta d^g\})) = \frac{\Delta t}{C}$$

$\{\varepsilon_{i-1}^g\}$  前のステップのひずみ

$\{\Delta\varepsilon^g\}$  現在のステップのひずみ増分

$\{d_{i-1}^g\}$  前のステップでの損傷

$\{\Delta d^g\}$  現在のステップでの損傷増分

# 継続法による非線形問題の解法

## ▶ 弾性予測による継続(PRED\_ELAS)

### ▶ 使用ルール

- 初期降伏面を少なくとも1個の点を超える必要
- 構成則に依存: ENDO\_SCALAIRE, ENDO\_FRAGILE, ENDO\_ISOT\_BETON, ENDO\_ORTH\_BETON, VMIS\_ISOT\_\*, CZM\_\* and BETON\_DOUBLE\_DP
- 基準 C: 損傷 または ひずみが増大する速度
- 結果として得られる方程式は2つの解をもつ -> 必ず基準を選ぶ RESIDU, ANGL\_INCR\_DEPL, NORM\_INCR\_DEPL (ドキュメントを参照)

# Code\_Aster における継続法の使い方

# Code\_Aster における継続法の使い方

- ▶ 荷重経路の決定にパラメータを使う継続法には、モデルで直接的または間接的に時間を使わない:
  - 動的計算は不可 (`STAT_NON_LINE` で疑似時間を使う場合だけ可能)
  - 荷重負荷時間は不可:
    - パラメータ `INST` を伴う `FONC_MULT` と `AFFE_CHAR_MECA_F` は不可
  - `AFFE_MATERIAU/AFFE_VARC` で温度をコマンド変数として使用不可
- ▶ 接触/摩擦は**不可能**. ただし, (CZMでの) XFEM 法 または 離散要素 (`DIS_CHOC`) だけは可能
  - CZMについてはドキュメント参照のこと
- ▶ 一部の継続法にだけ線形探索が可能

# Code\_Aster における継続法の使い方

- ▶ `AFFE_CHAR_MECA` で, 荷重の定義
- ▶ `STAT_NON_LINE/EXCIT` で, 継続荷重の定義  
`EXCIT/TYPE_CHARGE='FIXE_PILO'`
- ▶ `STAT_NON_LINE/PILOTAGE` で, 継続パラメーターの定義
- ▶ ポスト処理 : パラメータは結果ファイルで閲覧可能  
(`ETA_PILOTAGE`)

# Code\_Aster における継続法の使い方

## ▶ ドキュメント:

- 非線形ソルバーについてのGeneral documentation [R5.03.01]
- 継続法についてのGeneral documentation [R5.03.80]
- 継続法の使い方, シンタックス [U4.51.03]
- 例:
  - [V6.03.114] [forma03d](#) 一般的な事例でのテストケース
  - [V6.04.124] [ssnv124](#) 降伏点解析のテストケース
  - [V6.05.101] [ssns101](#) シェル座屈のテストケース (RIKS法 )

# End of presentation

Is something missing or unclear in this document?  
Or feeling happy to have read such a clear tutorial?

Please, we welcome any feedbacks about *Code\_Aster* training materials.  
Do not hesitate to share with us your comments on the *Code\_Aster* forum [dedicated thread](#).