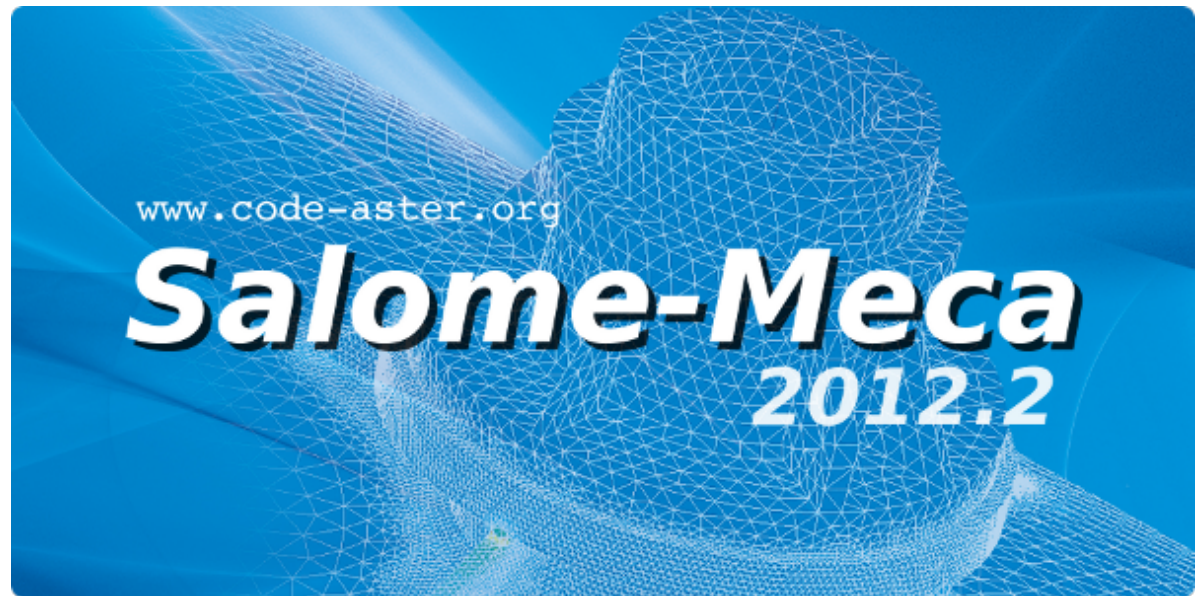


準靜的非線形解析

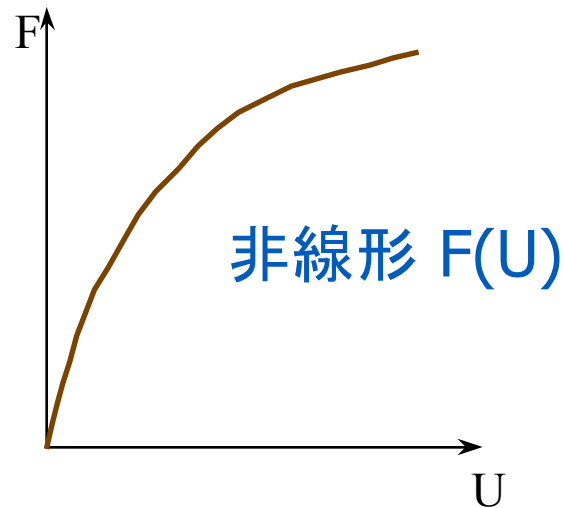


Code_Aster, Salome-Meca course material

GNU FDL licence (<http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html>)

非線形問題

- ▶ 2変数間の関係が比例関係でない場合
- ▶ 力学問題では, 変位/変形, 荷重/応力などが変数として扱われる

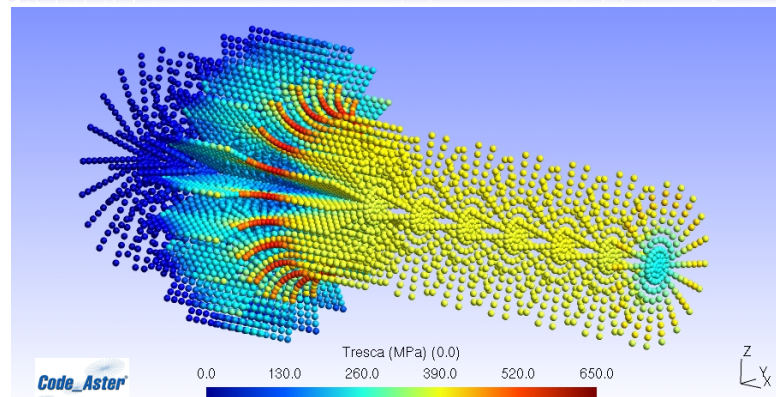
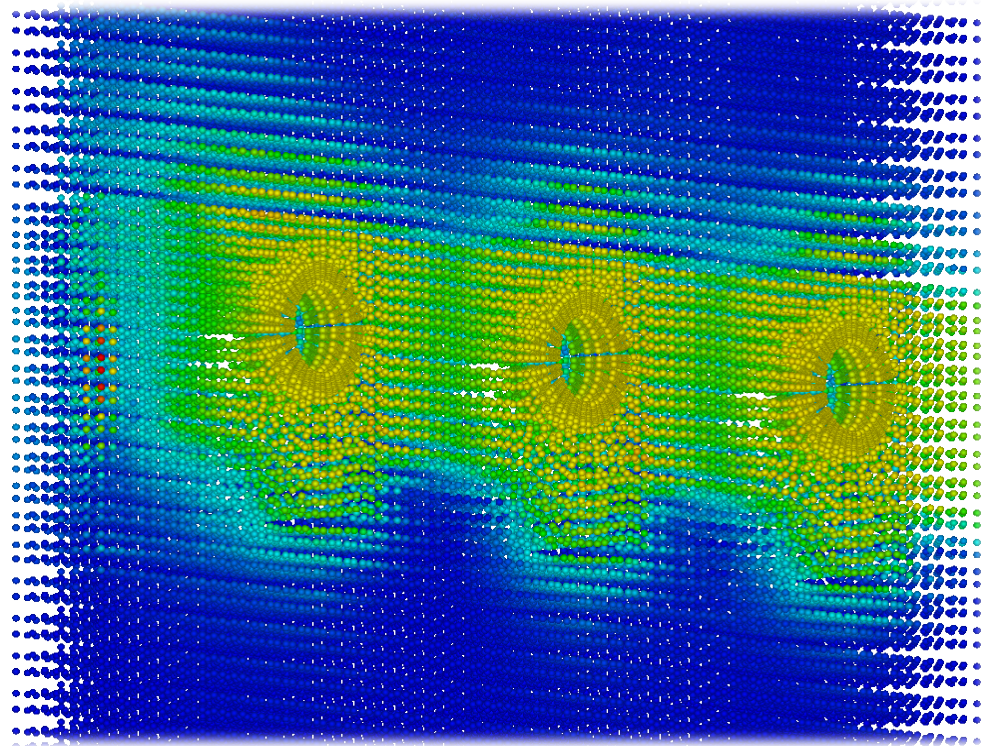
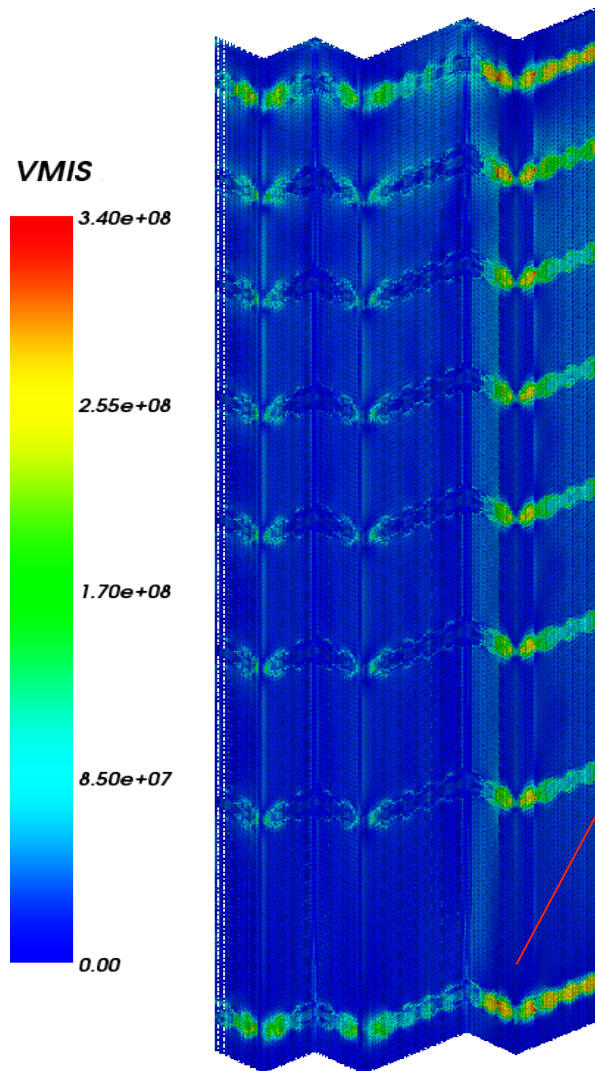


非線形問題

▶ 力学問題における非線形現象

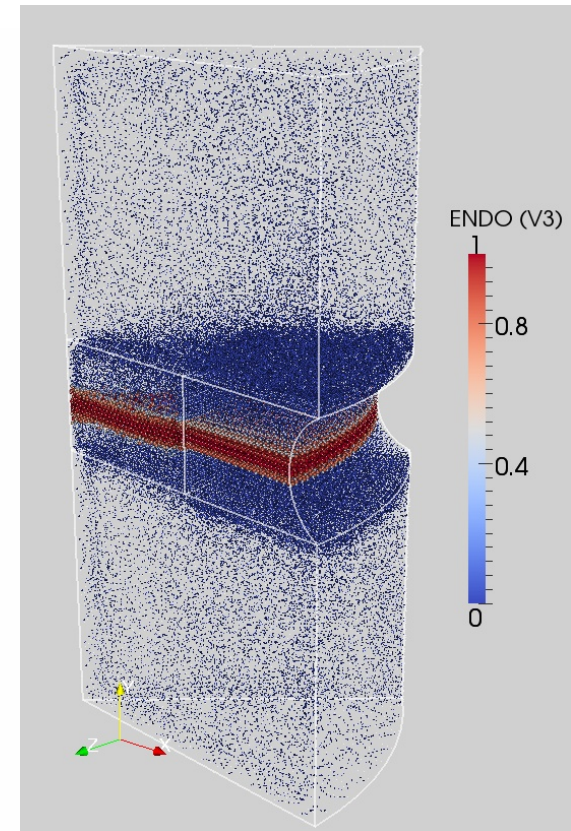
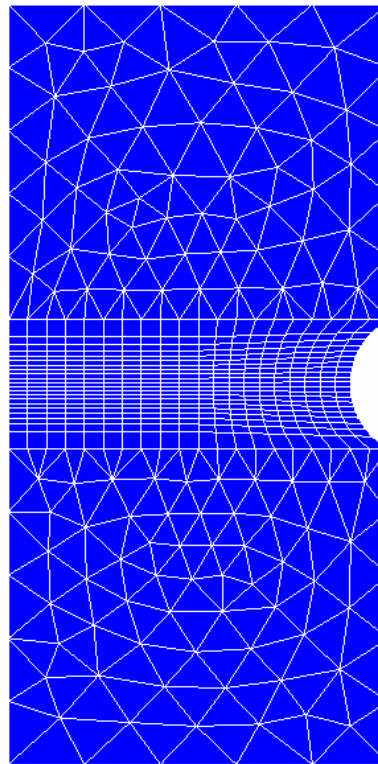
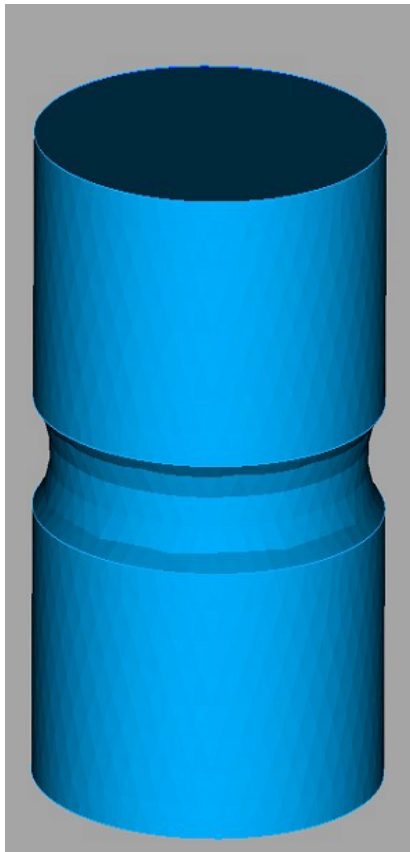
- 材料構成式
- 移動(幾何学的)
- 摩擦を伴う接触

例：接触非線形＋塑性變形

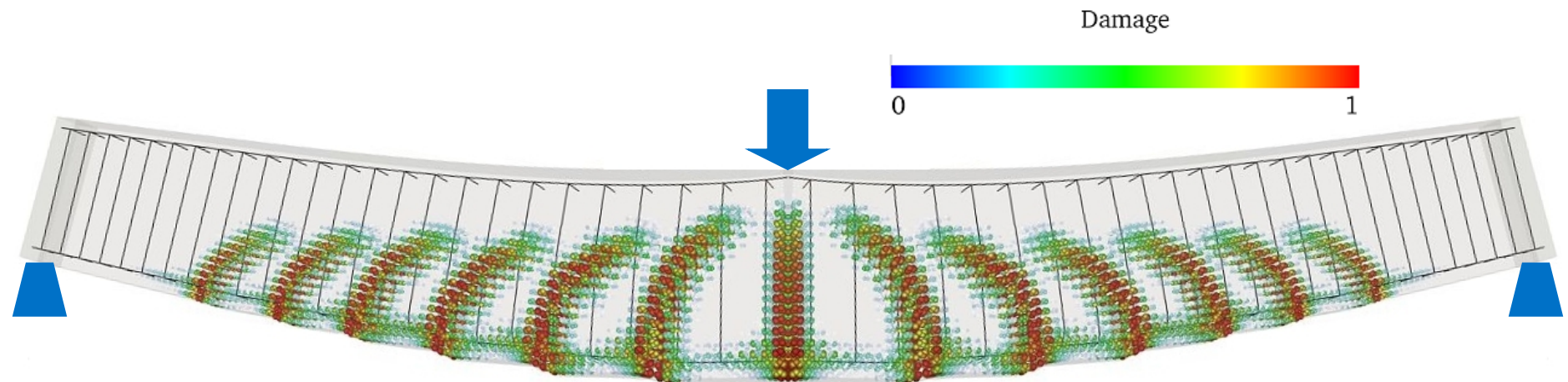
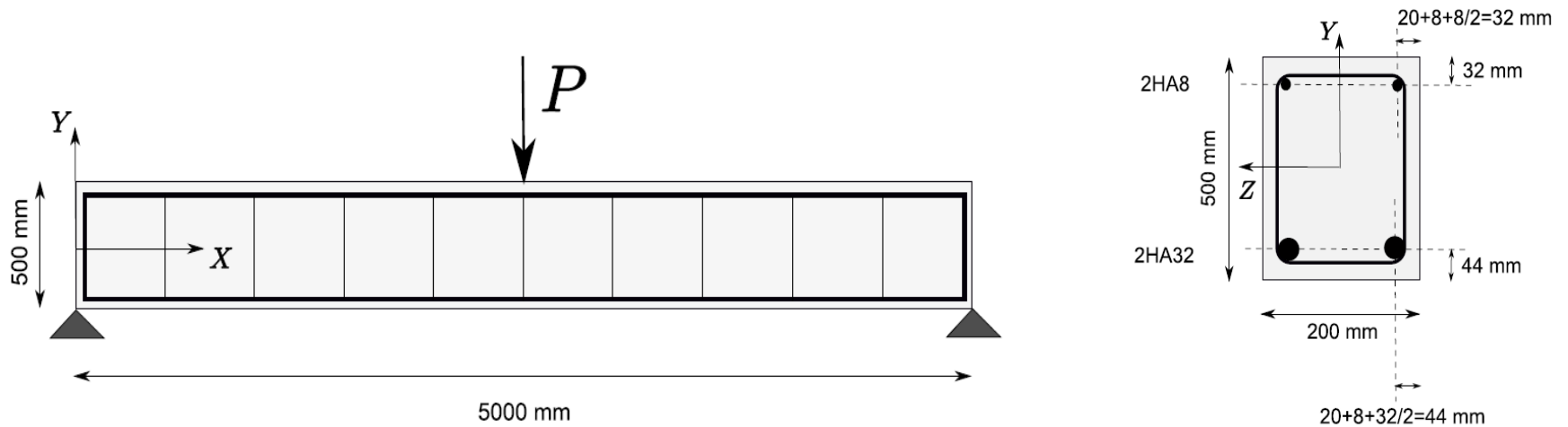


例：棒（試験片）の損傷

▶ き裂の発生と進展



例：トラスはりの損傷



非線形材料構成式

構成式(1)

- ▶ 構成式 [...] は2つの物理量の間に成立する材料や物質に固有の関係のことであり, 材料に外部から与えられる刺激に対して生じる反応を近似する. [Wikipedia]
- ▶ 力学問題では, 構成式は応力とひずみ関係を定義する
- ▶ *Code_Aster* のキーワード
 - **COMP_INCR or COMP_ELAS**
 - **RELATION** (構成式)
 - **DEFORMATION** (大変形)
 - **GROUP_MA/MAILLE/TOUT** ((モデルやメッシュへの)割当)

構成式 (2)

▶ 数学的分類

- 応力がひずみに比例する場合, 構成式は線形である. そうでなければ, 構成式は非線形

▶ 現象的分類

- 応力が, 材料の履歴において以前の状態に基づいて計算される場合, 構成式は非線形である. そうでなければ, 弾性

▶ Code_Asterにおける分類

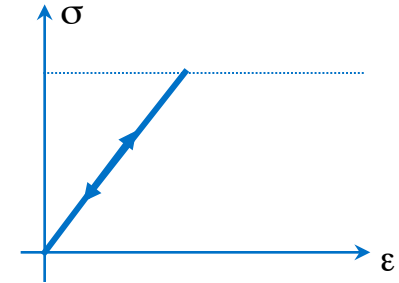
- **COMP_ELAS**: 材料は非線形弾性または線形弾性
- **COMP_INCR**: 材料は非線形・非弾性 (非弾性かつ線形はあり得ない)

構成式 (3)

▶ 弾性挙動 - 線形弾性

- 応力は線形にひずみに比例する

`RELATION = 'ELAS'`



- 2つのケース：



- 初期応力や初期ひずみがない場合: `COMP_INCR` または `COMP_ELAS` が利用可能
- 初期応力や初期ひずみがある場合: `COMP_INCR` だけが利用可能

構成式(4)

弾性挙動 – 非線形弾性

■ 超弾性 – ポテンシャル関数から導かれる

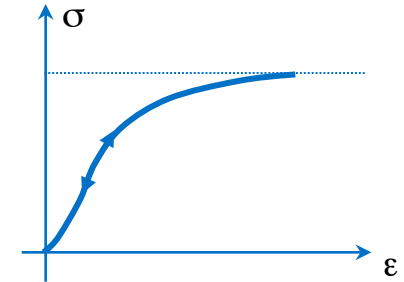
- «pseudo-hardening »を伴う線形または非線形

`RELATION = 'ELAS_VMIS_LINE'`

`RELATION = 'ELAS_VMIS_TRAC'`

- 一般化ムーニー・リブリン(MOONEY-RIVLIN)

`RELATION = 'ELAS_HYPER'`

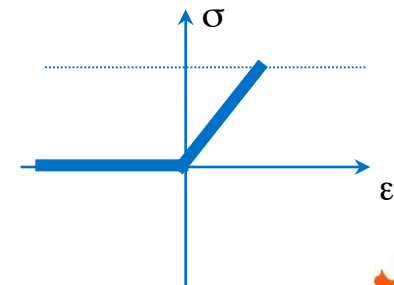


■ 弾性はりに対する大回転 / 大変形

`'ELAS_POUTRE_GR'`

■ ケーブルにおける弾性(引張と圧縮とで異なる挙動)

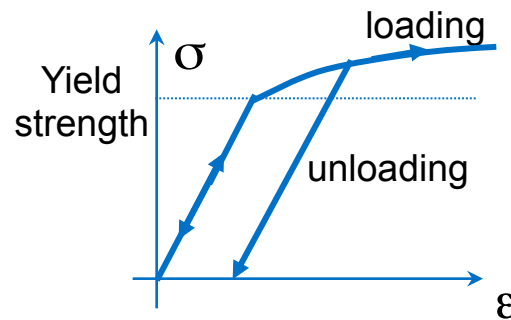
`RELATION = 'CABLE'`



構成式(5)

▶ 非弾性挙動

- 微分方程式の陰的解法で表現される構成則
 - 増分積分：変位増分 Δu に対する応力増分 $\Delta \sigma$
 - 内部変数の存在(記憶効果のため)
 - 荷重・荷重と徐荷で異なる経路
- 現在の状態は以前の状態や内部変数に依存する



構成式 (6)

▶ 非弾性挙動—Von Mises 弾塑性

■ 等方硬化

- 線形 : `VMIS_ISOT_LINE`
- 非線形 : `VMIS_ISOT_TRAC`

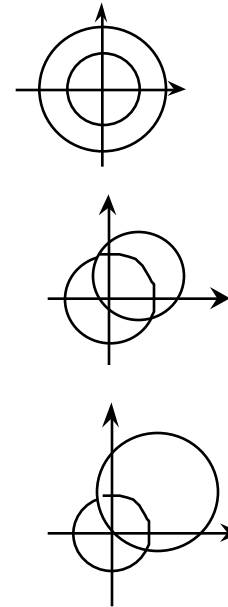
■ 移動硬化

- 線形 : `VMIS_CINE_LINE`

■ 複合硬化 : 移動硬化 + 等方硬化

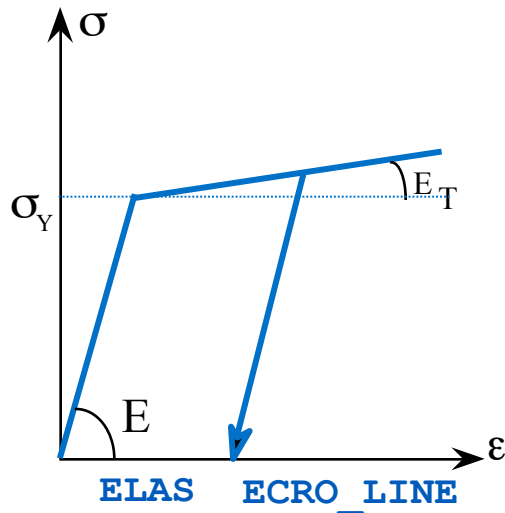
- 線形 : `VMIS_ECMI_LINE`
- 非線形 : `VMIS_ECMI_TRAC`

■ すべての材料特性が、温度の関数として定義可能

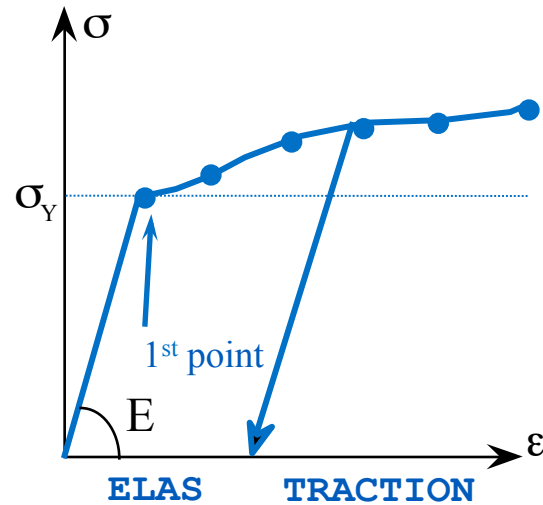


構成式 (7)

硬化曲線の定義方法



直線 - LINE



点群 - TRAC

構成式 (8)

▶ 非弾性挙動—弾塑性

- 2つの硬化テンソルを使うChabocheモデル

CHABOCHE

- Rousselierモデル: 延性破断

ROUSSELIER

- 繰返し負荷に対する弾塑性挙動

- Taheriモデル: **VISC_TAHERI**

- 多結晶モデルに対するミクロ・マクロアプローチ: **POLYCRISTAL**

構成式 (9)

▶ 非弾性挙動－粘塑性

- Taheri モデル

VISC_TAHERI

- 等方的損傷を伴う Chaboche モデル (鉄鋼容器の高温下での挙動)

VENDOCHAB

- 等方硬化を伴う Lemaitre モデル

LEMAITRE

構成式 (10)

▶ 非弾性挙動 – 中性子照射を伴う粘塑性

- LMARC's モデル (核燃料被覆管の直交異方性挙動)

`LMARC_IRRA`

- 棒要素またははり要素 (燃料ロッド) に対する中性子照射下でのクリープモデル

`VISC_IRRA_LOG, GRAN_IRRA_LOG`

▶ 非弾性挙動 – 粘塑性と冶金学的非弾性

- 等方硬化または幾何学的 (非) 線形 (粘) 塑性, 変態塑性, 粘性回復

`META_*`

構成式 (11)

▶ 非弾性挙動－コンクリート

- Mazars's モデル (損傷をとみなう脆性的弾性)

MAZARS

- 引張・圧縮に対する非線形挙動

BETON_DOUBLE_DP

▶ 非弾性挙動－コンクリートのクリープ

- Granger とAgeing のクリープモデル (1D または等方性)

GRANGER_FP_V

- ・ 多軸クリープモデル

BETON_UMLV_FP

構成式 (12)

▶ 非弾性挙動－ 損傷

■破壊力学

■ 局部損傷モデル－ ひずみ軟化を伴う脆性的弾性挙動

`ENDO_FRAGILE`

■ 非局所損傷モデル

■ 損傷挙動との連成モデル

`ENDO_FRAGILE, ENDO_ISOT_BETON, RUPT_FRAG, ...`

◆ 内部変数勾配モデル

`* _GRAD_VARI`

■ ひずみ勾配モデル

`* _GRAD_EPSI`

構成式 (13)

▶ その他の構成式

- 結合/接合要素
- ポーラス土質材料式
- ドキュメント参照 [U4.51.11]

▶ ユーザ定義の構成式が使用可能

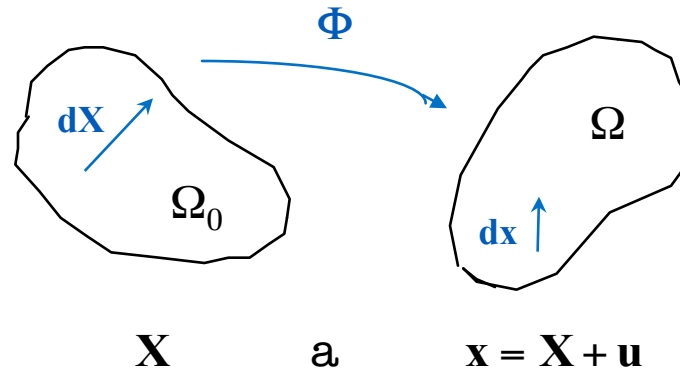
- UMAT フレームワーク (Abaqus 標準)
- ZMATフレームワーク (Zebulon 標準)

(移動)幾何学的非線形性

幾何学的非線形 (1)

変位とひずみの関係を定義

■ 大変形



■ $\mathbf{F}$ は変形勾配テンソル

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}$$

幾何学的非線形 (2)

▶ 2種類の幾何学的非線形性

- 大変形（ひずみが微小にとどまっても変位が大きい）
- 有限ひずみ

▶ 幾何学的非線形. ひずみ

- 微小線形ひずみ（線形対称勾配）

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_i u_j + \partial_j u_i)$$

- 有限ひずみテンソル (Euler-Almansi または 一般化Hill) :

$$\begin{cases} \mathbf{E}_m = \frac{1}{2m} (\mathbf{U}^{2m} - \mathbf{I}) & \text{if } m > 0 \\ \mathbf{E}_0 = \ln \mathbf{U} \end{cases}$$

幾何学的非線形 (3)

▶ 薄肉構造物: 大変形 / 大回転 + 微小ひずみ

- 次の定義が必要:

`DEFORMATION='GROT_GDEP'`

- 送電線鉄塔のはりや柔軟部材のモデル化に非線形弾性を用いる必要がある

`COMP_ELAS='ELAS_POUTRE_GR'`

- 3D シェル (COQUE_3D). 線形弾性挙動または非弾性増分挙動

`COMP_ELAS='ELAS' or COMP_INCR`

運動学 (4)

▶ 微小ひずみ

- 微小変形

`DEFORMATION='PETIT'`

- 大変形

`DEFORMATION='GROT_GDEP'`

▶ 大ひずみ

- アップデートラグランジュは回転が微小である場合に向く

`DEFORMATION='PETIT_REAC'`



- ◆ シェルとはりには推奨しない

- Simo-Mieheモデルは等方硬化弾塑性材料のみに使用

`DEFORMATION='SIMO_MIEHE'`

- Miehe-Apel-Lambrechtモデルは等方硬化則と移動硬化則に使用

`DEFORMATION='GDEF_LOG'`

運動学 (5)

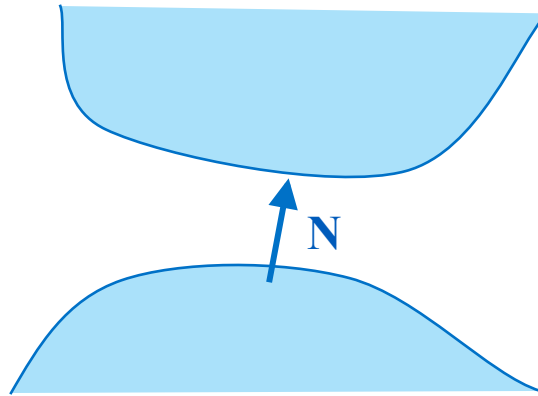
▶ 非線形漸増座屈

- 各時間増分で幾何剛性マトリックスを計算する
 - 2Dと3Dの連続体力学
 - はり
 - 3Dシェル
- 接線剛性マトリックスを含む固有値問題を解く
CRIT_FLAMB

接触と摩擦

接触 (1)

2固体間の接触



接触の未知数:

- 2物体間の符号付き距離 (ギャップ)

$$g = \mathbf{u} \cdot \mathbf{N}$$

- 接触圧

$$p = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{N} \cdot \mathbf{N}$$

接触 (2)

▶ Signorini-Hertz-Moreau条件

- 幾何学的条件：食込みなし (Signorini)

$g \geq 0$ $g > 0$ 接触なし
 $g = 0$ 接触

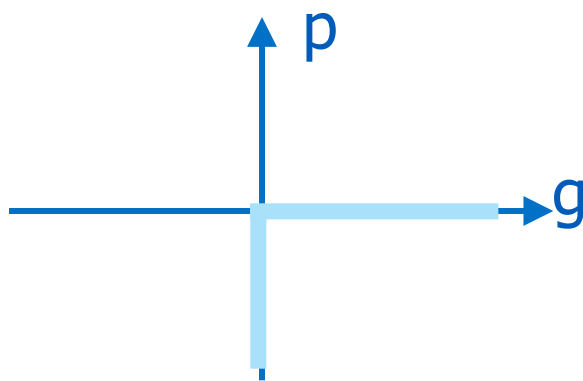
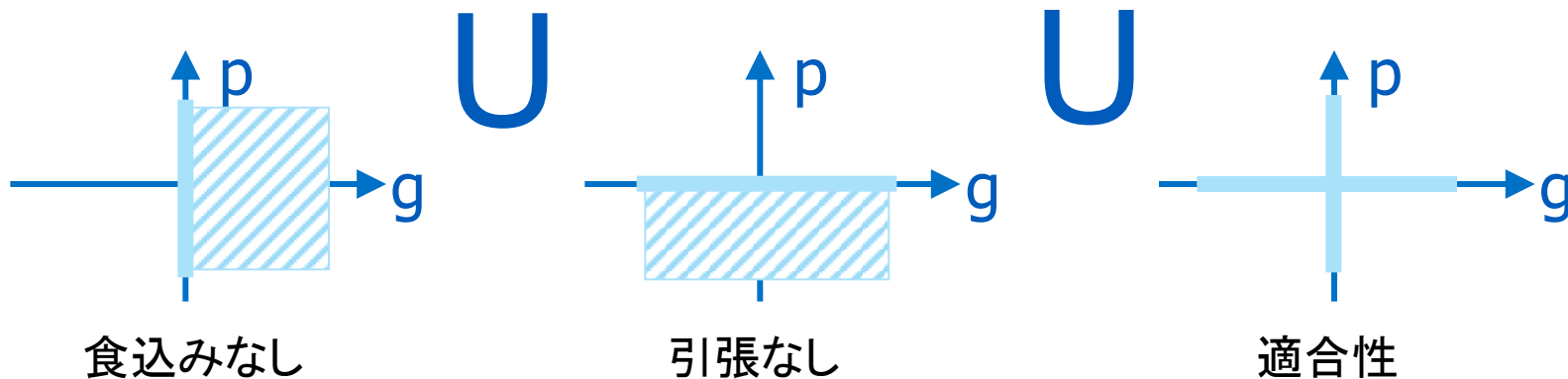
- 力学的条件：引張力なし (Hertz)

$p \leq 0$ $p = 0$ 接触なし
 $p < 0$ 接触 (圧縮)

- エネルギー条件：適合性 (Moreau)

$p \cdot g = 0$ $p = 0$ 分離
 $g = 0$ 接触

接触 (3)



非線形!

解法

▶ 解析手法

■ ラグランジュ乗数法

- 未定乗数の導入
- 接触条件の厳密な適用

$$\begin{cases} \mathbf{K} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{A}^T \cdot \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{F} \\ \mathbf{A} \cdot \mathbf{u} \leq d^- \\ \boldsymbol{\lambda} \geq 0 \\ (\mathbf{A} \cdot \mathbf{u} - d^-)_j \cdot \lambda_j = 0, \forall j \end{cases}$$

■ ペナルティ法

- 新たな未知数を使用しない
- 接触条件を近似的に適用



0 剛性

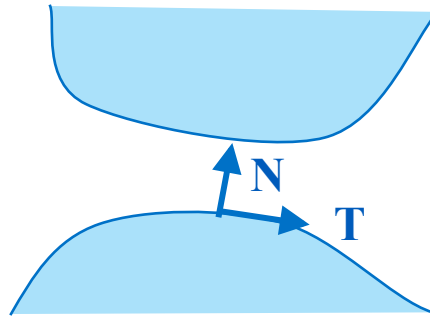


E_N 剛性
法線方向

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{u} + E_N \mathbf{A}^T \cdot [\mathbf{A} \cdot \mathbf{u} - d^-]^+ = \mathbf{F}$$

接触/摩擦 – 定義 (1)

▶ 2固体間の摩擦的接触



- ▶ 3D問題では, 接線ベクトル T は2固体間の接平面上の2ベクトル $t1$ と $t2$ に分解される

接触/摩擦 – 定義 (2)

► 摩擦接触：摩擦しきい値が存在 $\phi = ||\mathbf{t}|| - \mu \cdot |p|$

- $\mathbf{t}$ は2物体間のせん断応力

- p は接触圧力

- μ は摩擦係数

- $||\mathbf{t}|| < \mu \cdot |p|$ ならば

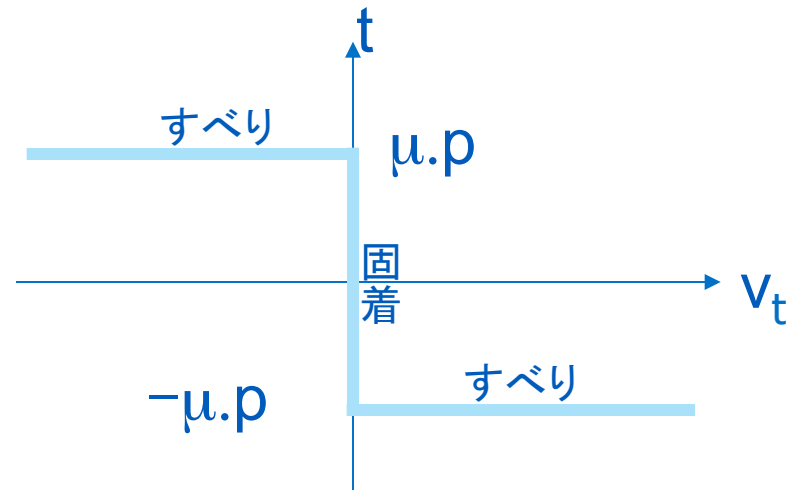
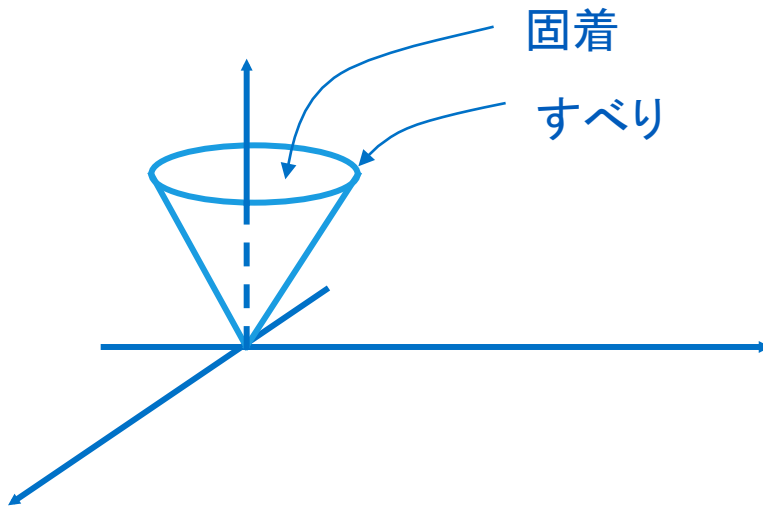
 - 固着：相対変位なし

- $||\mathbf{t}|| = \mu \cdot |p|$ ならば

 - すべり：相対変位あり

接触/摩擦 – 定義 (3)

► Coulombの円錐



接触/摩擦 – 定義 (4)

▶ 接触の定式化

$$\begin{cases} u_n \leq g \\ p \leq 0 \\ p \cdot (u_n - g) = 0 \end{cases}$$

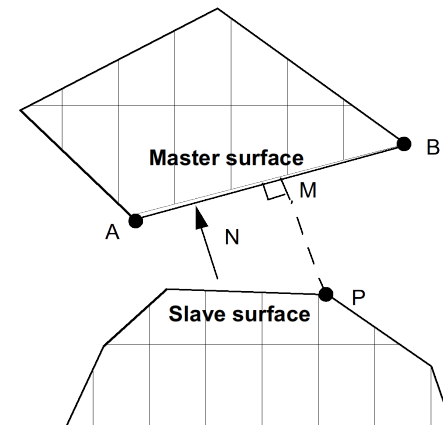
▶ 摩擦の定式化

$$\begin{cases} \|\mathbf{t}\| - \mu \cdot |p| \leq 0 \\ \mathbf{v}_t = \lambda_g \cdot \frac{\mathbf{t}}{\|\mathbf{t}\|} \\ \lambda_g \cdot (\|\mathbf{t}\| - \mu \cdot |p|) = 0 \\ \lambda_g \leq 0 \end{cases}$$

実際 (1)

▶ `DEFI_CONTACT` で摩擦接触を設定

- キーワード `ZONE` により接触領域を指定
(a `ZONE` = 接触想定領域)
- 各接触領域に対して, 接触面を定義:
 - `GROUP_MA_MA` : マスタ面
 - `GROUP_MA_ESCL` : スレーブ面
 - スレーブ面上の節点はマスター面に食込むことができない
 - 大すべりが許容される
- 境界要素がメッシュ中に存在しなければならない
- 法線は外向きを指す必要がある
 - 接触面は自動的に方向が指定される
 - 2D : `ORIE_PEAU_2D`
 - 3D : `ORIE_PEAU_3D`
 - 平板とシェル : `ORIE_NORM_COQUE`
 - そうでなければ致命的なエラーとなる



実際 (2)

▶ 連続フレームワークの拡張ラグランジュ法

`DEFI_CONTACT` コマンドの中の `FORMULATION='CONTINUE'`

- 摩擦接触に対しては安定しており, 推奨

▶ 離散フレームワークのラグランジュ法

■ `DEFI_CONTACT` コマンドの中の `FORMULATION='DISCRETE'`, `ALGO_CONT='GCP'`

- 高速な反復解法であり, 反復の停止条件が必要

■ `RESI_ABSO`, 最大食込み許容値を指定する

▶ 他の定式化とアルゴリズム

- ユーザマニュアル ([U4.44.11]) と 接触How-to ([U2.04.04])を参照のこと

非線形問題の解法

解法 (1)

▶ 連続体汎関数表現

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u} \in V \\ \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} d\Omega + \int_{\Gamma_N} \mathbf{T} \cdot \mathbf{v} d\Gamma \end{array} \right. \quad \forall \mathbf{v} \in V_0$$

解法 (2)

▶ 離散的汎関数表示

- 節点力中の内力の離散化:

$$\left(\mathbf{F}_{\text{int.}}(\mathbf{u}, t)\right)_k = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_k) . d\Omega = \left(B^T . \boldsymbol{\sigma}\right)_k$$

- 節点力中の外力の離散化:

$$\left(\mathbf{F}_{\text{ext.}}\right)_k = \int_{\Omega} \mathbf{u}_k^T . \mathbf{f} . d\Omega + \int_{\Gamma_N} \mathbf{u}_k^T . \mathbf{T} . dS$$

- 積分評価: ガウス積分
- 未知変数: 離散化変位場 $\{\mathbf{u}\}$
- パラメータ: 時間ステップ t

解法 (3)

▶ 非線形システムの離散化:

$$\{F_{\text{int.}}(u, t)\} = \{F_{\text{ext.}}(t)\}$$

- 常に内力は外力とつり合っている必要がある

▶ 以下のように書き換えられる

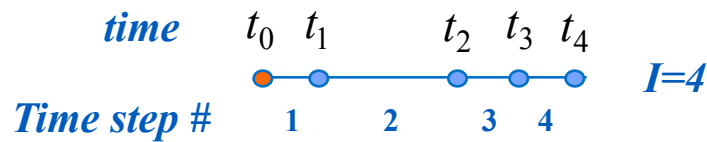
$$\{R(u, t)\} = \{F_{\text{int.}}(u, t)\} - \{F_{\text{ext.}}(t)\} = \{0\}$$

- 残差力Rは常に0である

解法 (4)

▶ 時間方向の離散化

■ 荷重負荷に関する時間ステップ離散化



$$\mathbf{F}_{\text{ext},i}^{\text{meca}} = \sum_{k=1}^{\text{loads}} g_k(t_i) \mathbf{F}_{\text{ext},k}$$

■ 各時間Step t_i , について変位場 $\{u\}_i$ を解く :

$$\left\{ F_{\text{int.}}(u_i, t_i) \right\} = \left\{ F_{\text{ext.}}(t_i) \right\}$$

解法 (5)



- ▶ ニュートン法はアイザック・ニュートンにより開発され「導関数手法」として1736年に発表された. しかしそれ以前の1690年にジョセフ・ラフソンにより“Analysis Aequationum”の中に記載され, 「導関数手法」の核心部分は1671年に既に書かれていた
- ▶ 本手法は数値方程式, 「 $f(x) = 0$ 」の近似解法 (f は微分可能 なとき)

解法 (6)

▶ 単純問題へのニュートン法の適用

■ 解法 $F(x)=0$

■ 数列の構築 (x^n)

■ 一次近似テーラー展開 $F(x)$

$$0=F(\mathbf{x}_{n+1})\approx F(\mathbf{x}_n)+F'(\mathbf{x}_n)(\mathbf{x}_{n+1}-\mathbf{x}_n)$$

■ 次式を得る

$$\mathbf{x}_{n+1}=\mathbf{x}_n-\left[F'(\mathbf{x}_n)\right]^{-1}F(\mathbf{x}_n)$$

解法 (7)

▶ 本問題に関するニュートン法

■ 与えられた問題

$$\{R(u_i, t_i)\} = \{0\}$$

■ テーラー展開の一次近似

$$u_i^{n+1} = u_i^n - [\nabla F_{\text{int}}(u_i^n)]^{-1} (F_{\text{int}}(u_i^n) - F_{\text{ext}})$$

■ もしくは等価な次の線形方程式を解く

$$\nabla F_{\text{int.}}(u_i^n) (u_i^{n+1} - u_i^n) = (F_{\text{ext}} - F_{\text{int.}}(u_i^n))$$

解法 (8)

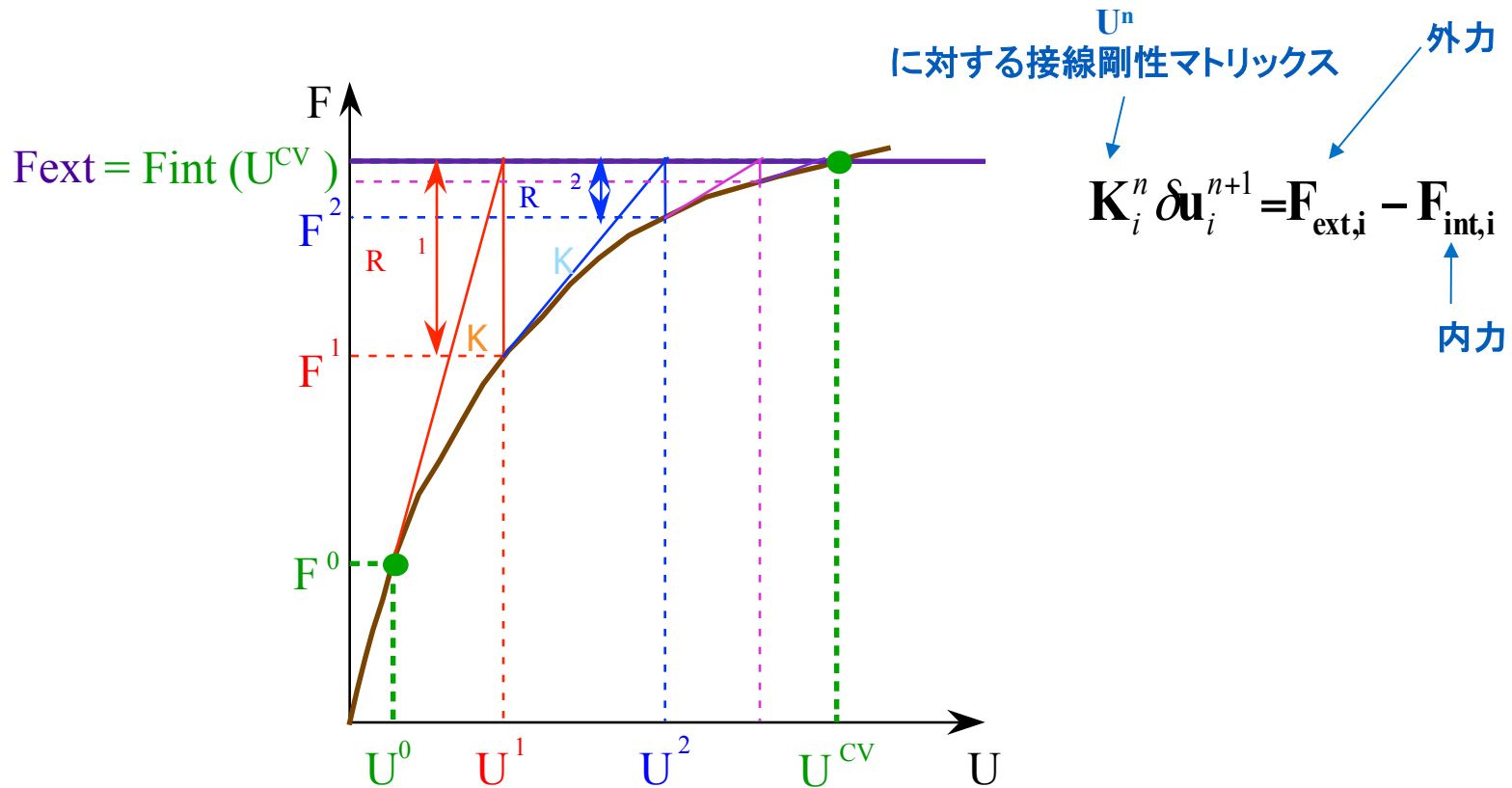
▶ 解くべき線形方程式

$$\mathbf{K}_i^n \delta \mathbf{u}_i^{n+1} = \mathbf{F}_{\text{ext},i} - \mathbf{F}_{\text{int},i}$$

- $\mathbf{K}$ は接線剛性マトリックスと呼ばれる
- $\delta \mathbf{u}_i^{n+1}$ はニュートン反復中の変位増分
- $\mathbf{F}_{\text{ext},i} - \mathbf{F}_{\text{int},i}$ は残差力(つり合いが成立するとゼロ)

解法 (9)

図解すると



解法 (10)

▶ 残差の構築 (内力と外力の計算含む)

- 正確な計算が必須: 問題の正解への収束を保証する
- 残差評価における小さな誤差が深刻な結果をもたらす得る

▶ 接線剛性マトリックスの構築

- 厳密な評価は必須ではない
- 接線剛性マトリックスの計算において近似や失敗を起こし得る (準ニュートン法)
- このため収束が遅れることがある
- 収束すれば正解



解法 (11)

▶ コンシステント接線剛性マトリックス

- 局所的には最良のマトリックス: 2次の収束を保証
- 計算コストが高い
- 徐荷時は剛性が小さい (通常発散する)
- 非対称になり得る

MATRICE = 'TANGENTE'

解法 (12)

▶ 接線剛性マトリックスの近似と変化

■ “弾性” 剛性行列

- 一回だけの計算 (計算コスト小)
- 保障されているが遅い収束
- 各反復計算は速い
- 徐荷時は使用

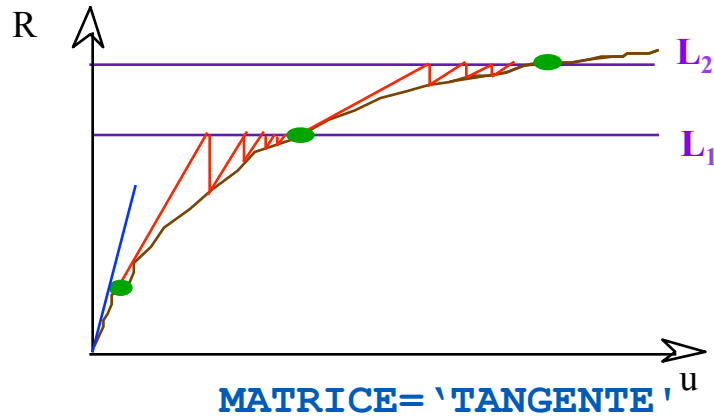
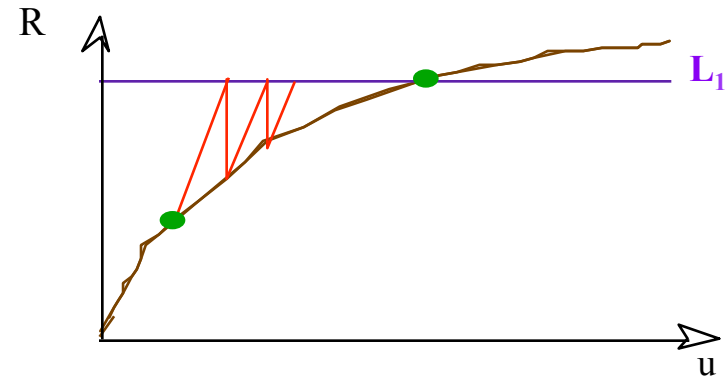
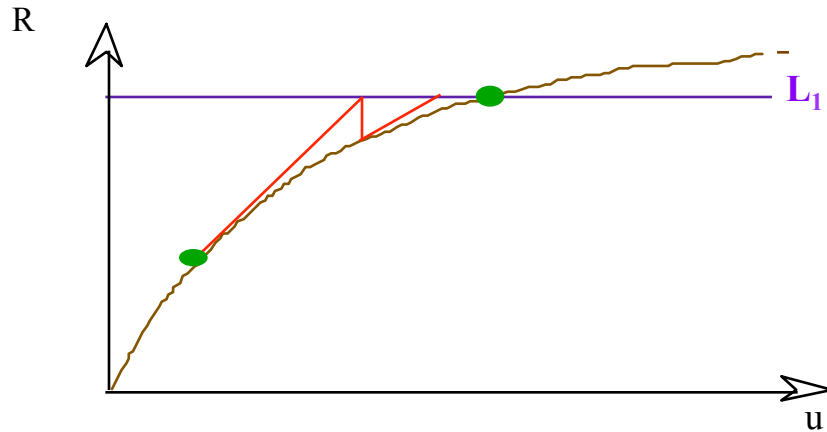
`MATRICE = 'ELASTIQUE'`

– 接線剛性行列の時間ステップごとの更新

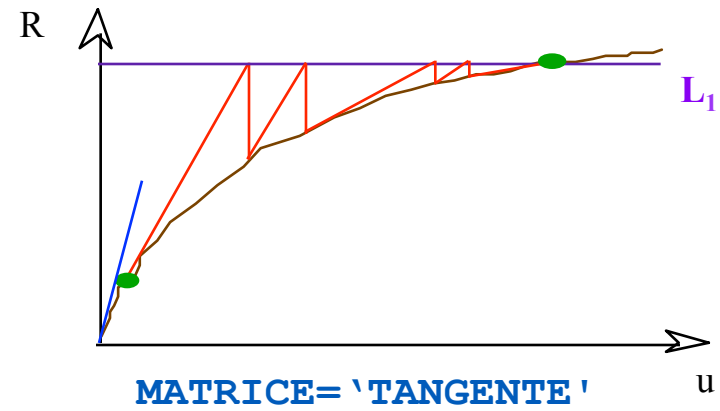
- ・ 各 i0 増分
- ・ 各 n0 ニュートン反復
- ・ 計算は速い精度は低い=> より多くの反復回数が必要
- ・ 発散する可能性がある

`REAC_INCR` et `REAC_ITER`

解法 (13)



REAC_INCR=1



REAC_ITER=2

POURSUITE (リスタート) 計算

▶ 変更可能な箇所:

- 材料パラメータの変数 (構成式を除く :例外:Lemaitre弾塑性)
- 荷重
- 境界条件
- モデル (一部の要素を削除可能という意味)

収束しない場合は？

- ▶ 問題の物理的整合性をチェック
- ▶ 接線剛性マトリックスをより頻繁に更新
- ▶ 時間ステップをより細かく分割する
- ▶ 接線剛性マトリックスの予測に弾性剛性マトリックスを使用
- ▶ 非線形How-toを参照のこと [U2.04.01]

End of presentation

Is something missing or unclear in this document?
Or feeling happy to have read such a clear tutorial?

Please, we welcome any feedbacks about Code_Aster training materials.
Do not hesitate to share with us your comments on the Code_Aster forum [dedicated thread](#).