

オープンCAE勉強会@関東

「数値流体力学」輪講

第6回

第3章：乱流とそのモデリング(5)

[3.7.2、p.76～84]

日時：2014年2月22日、14:00～

場所：日本ESI@新宿

本日

日程	パート部分	ページ
2014.02	第3章：乱流とそのモデリング 担当セクション：3.7.2	p.76～84

※今回は北風が担当しました。
ご質問・記述ミス等に関するご指摘が
ありましたら、以下までご連絡下さい。

shingo0323northwind@gmail.com

混合長モデルの評価(前回のTHINKさん資料より)

利点

- 実装するのが容易であり、計算負荷の観点から安価である
- 噴流、混合層、後流や境界層である薄いせん断層に対して精度がよい
- 確立されている

欠点

- 分離や再循環を伴う流れを完全に記述することができない
- 平均流れの変数と乱流粘性応力しか計算できない



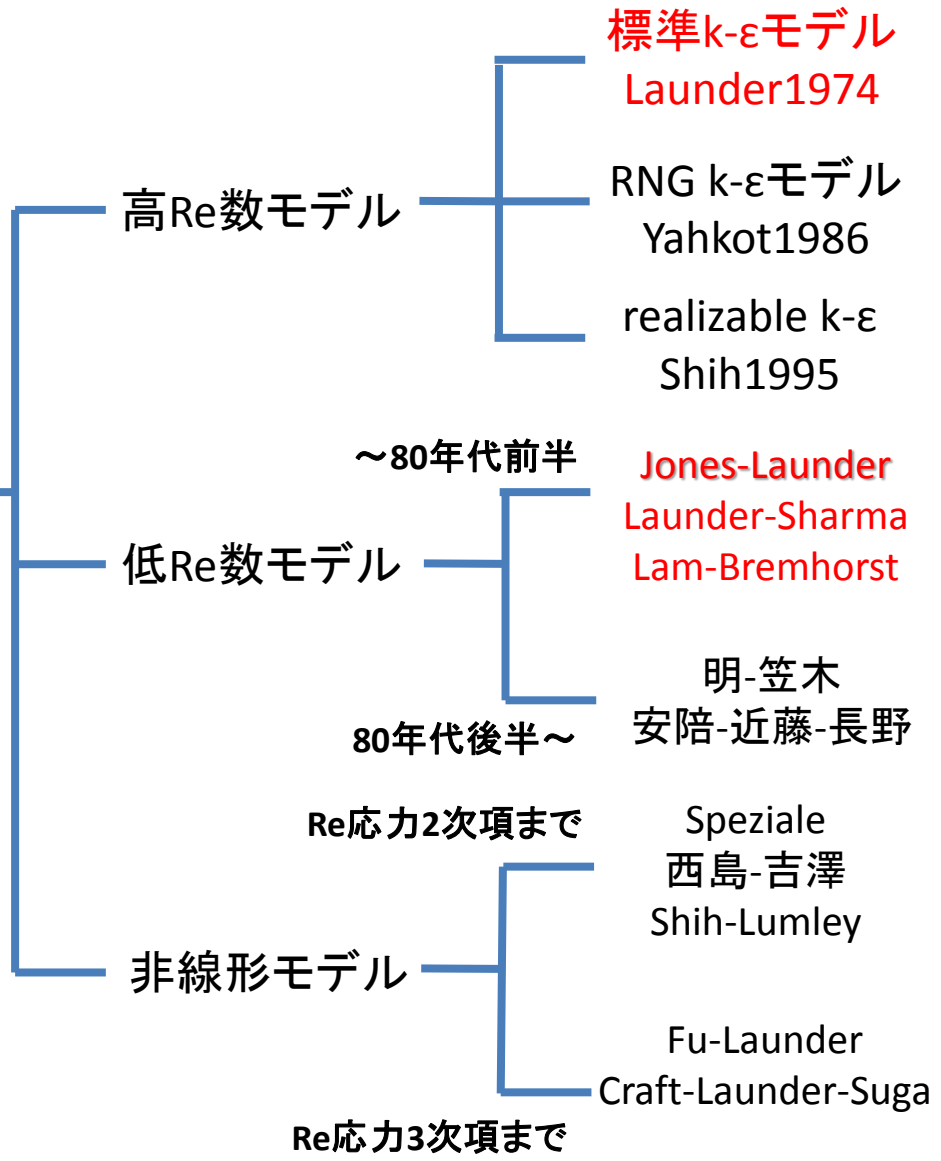
産業応用上、重要な剥離を伴うような物体周りや内部の流れ場を混合長モデル(0方程式)で扱うのは難しい！

⇒0方程式モデルは航空分野以外では、ほぼ使われていない

Baldwin-Lomax(1978, NASA Ames)、Cebeci-Smith(1967, Douglas Aircraft)

乱流モデルの種類 (k-εモデルで細分化)

乱流モデルで 解くべき 方程式の数	名前
0	混合長モデル
1	Spalart-Allmarasモデル
2	k-εモデル K-ωモデル (陽的)代数応力モデル
7	レイノルズ応力モデル



k-ε モデルの速度と長さのスケール

大きなスケールの乱れで代表する速度スケール θ と長さスケール l を定義するために、 k と ε を用いる

$$\theta = k^{1/2} \qquad l = \frac{k^{3/2}}{\varepsilon}$$

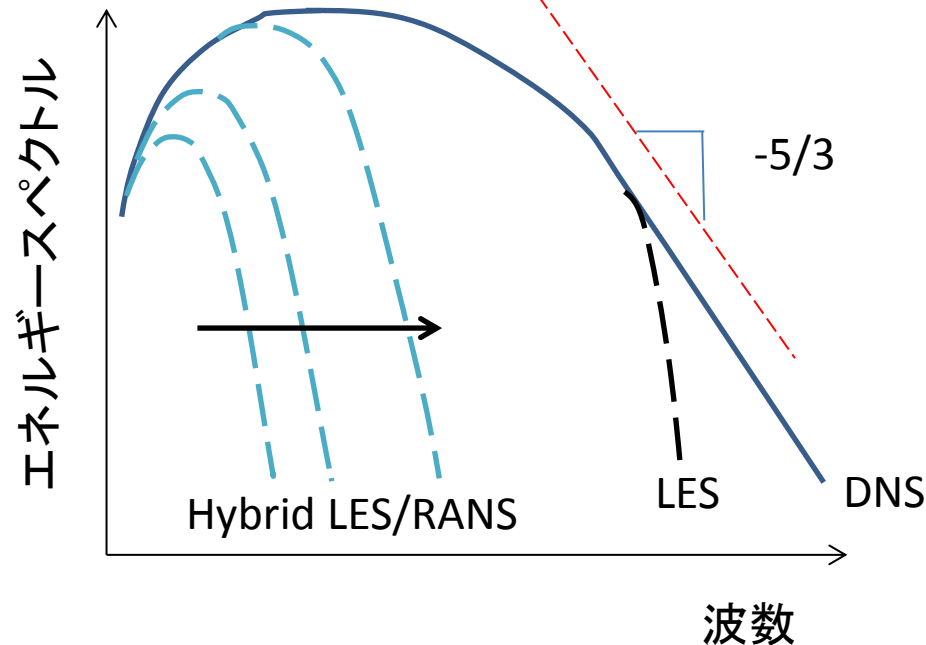
“大きな渦”のスケール l を定義するために“小さな渦”の変数 ε を用いることの妥当性には疑問が残る



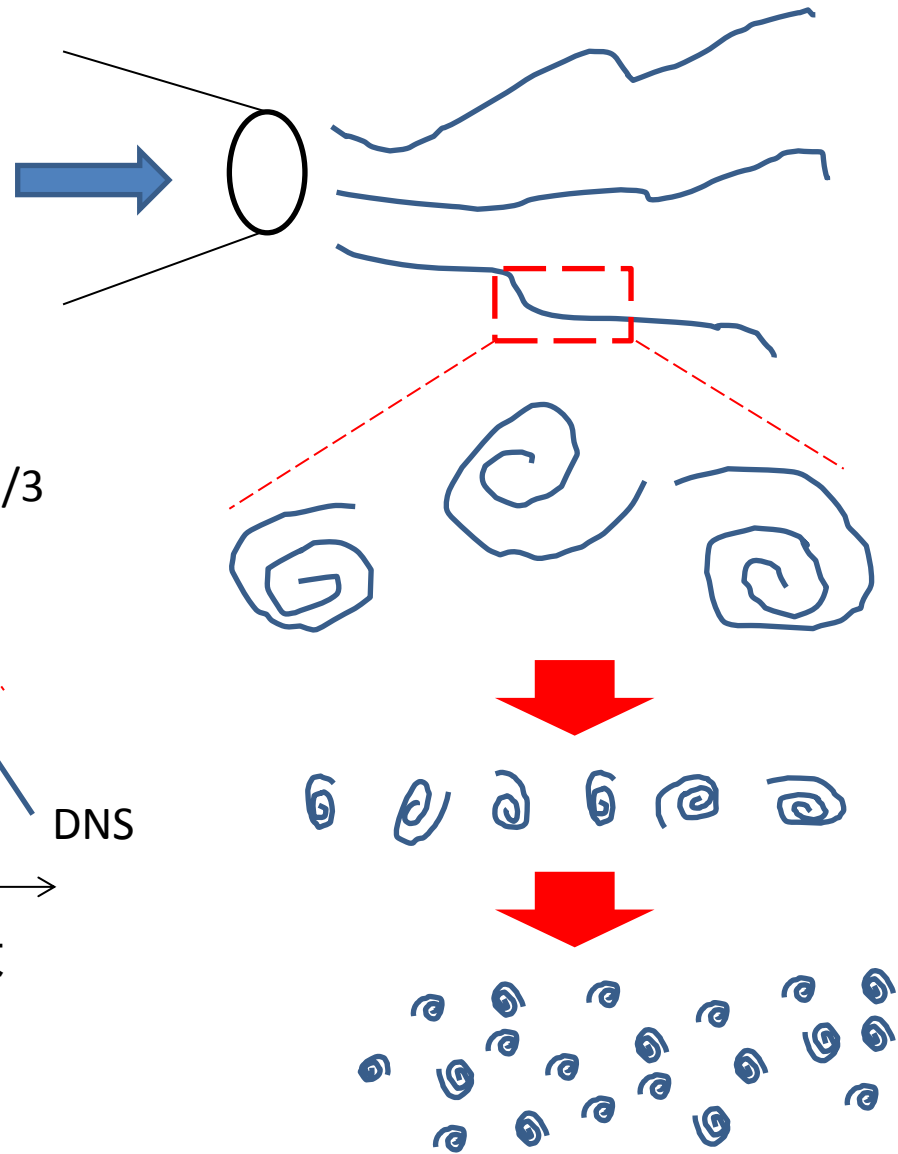
高Re数で流れが急激に変化しない場合、**大きな渦が平均流れからエネルギーを取り出す速度**は**エネルギースペクトルを通過して小さな消散する渦にエネルギーが移動する速度**とほぼ一致
⇒上記の疑問は許容できる

(補足)エネルギーカスケード

46ページ 図3.3より



ご指摘により、LESの曲線を修正



k、εそれぞれの輸送方程式と各定数

次元解析より渦粘性は
右式のように定義できる

$$\mu_t = C\rho\theta l = \rho C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (3.44)$$

$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \text{div}(\rho k U) = \text{div}\left[\frac{\mu_t}{\sigma_k} \text{grad } k\right] + 2\mu_t S_{ij} \cdot S_{ij} - \rho\varepsilon \quad (3.45)$$

変化割合

対流による輸送

拡散による輸送

生成割合

消散割合

$$\frac{\partial(\rho\varepsilon)}{\partial t} + \text{div}(\rho\varepsilon U) = \text{div}\left[\frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \text{grad } \varepsilon\right] + C_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon}{k} 2\mu_t S_{ij} \cdot S_{ij}$$

※高Re数では渦粘性支配的、分子粘性を省略可

標準k-εモデル

Launder-Spalding(1974)

$$- C_{2\varepsilon} \rho \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (3.46)$$

$$C_\mu = 0.09 \quad \sigma_k = 1.0 \quad \sigma_\varepsilon = 1.3 \quad C_{1\varepsilon} = 1.44 \quad C_{2\varepsilon} = 1.92 \quad (3.47)$$

渦粘性近似(前回のTHINKさん資料より)

ブシネスク(Boussinesq)は、ニュートンの粘性則の類推より、レイノルズ応力を次のように表現した。

$$\tau_{ij} = -\rho \overline{u'_i u'_j} = \underbrace{\mu_t}_{\text{渦粘性係数}} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \rho \underbrace{k}_{\text{乱流運動エネルギー}} \delta_{ij}$$

$k = \frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i} = \frac{1}{2} (\overline{u'u'} + \overline{v'v'} + \overline{w'w'})$

これを渦粘性近似(乱流粘性近似)と呼ぶ。

渦粘性近似では、渦粘性係数や乱流運動エネルギーの予測が必須。

(補足) ブジネスクの渦粘性近似の式展開

$$R = \begin{bmatrix} -\overline{\rho u_1'^2} & -\overline{\rho u_1' u_2'} & -\overline{\rho u_1' u_3'} \\ -\overline{\rho u_2' u_1'} & -\overline{\rho u_2'^2} & -\overline{\rho u_2' u_3'} \\ -\overline{\rho u_3' u_1'} & -\overline{\rho u_3' u_2'} & -\overline{\rho u_3'^2} \end{bmatrix} \quad k = \frac{1}{2} \overline{u_i' u_i'}$$

$$= -\frac{2}{3} \delta k \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\overline{\rho u_1'^2} + \frac{2}{3} \rho k & -\overline{\rho u_1' u_2'} & -\overline{\rho u_1' u_3'} \\ -\overline{\rho u_2' u_1'} & -\overline{\rho u_2'^2} + \frac{2}{3} \rho k & -\overline{\rho u_2' u_3'} \\ -\overline{\rho u_3' u_1'} & -\overline{\rho u_3' u_2'} & -\overline{\rho u_3'^2} + \frac{2}{3} \rho k \end{bmatrix}$$

Re応力の非等方テンソルが歪速度の非等方テンソルに比例すると仮定

境界条件

● 流入条件: k と ε の分布を与える

● 流出条件: $\frac{\partial k}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial n} = 0$

● 自由流れ: $\frac{\partial k}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial n} = 0$

● 固体壁: Re数に依存

OpenFOAMでの対応ラベル

turbulentIntensityKineticEnergyInlet
(or fixedValue)

turbulentMixingLengthDissipationRateInlet
zeroGradient

symmetry or **slip**

高Re数モデル ⇒ 壁関数

kqRWallFunctions
epsilonWallFunctions

低Re数モデル ⇒ 値を指定
fixedValue or **zeroGradient**

壁関数と、それが成立するための前提条件

対数則 $u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln(y^+) + B = \frac{1}{\kappa} \ln(Ey^+) \quad (3.19) \text{ P61より}$

$30 < Y_{p1}^+ < 500$ である点での平均速度は対数則を満たし、乱流運動エネルギー k は生成と消散が等しい

⇒これらの仮定と渦粘性の式を用いると、局所の壁せん断応力を平均速度、 k と ε を関連付ける次式の壁関数を導出

$$u^+ = \frac{U}{u_\tau} = \frac{1}{\kappa} \ln(Ey_p^+) \quad k = \frac{u_\tau^2}{\sqrt{C_\mu}} \quad \varepsilon = \frac{u_\tau^3}{\kappa y} \quad (3.49)$$

壁関数成立の前提条件 (p301、9.4節 壁境界条件より)

①壁に対して垂直方向のみ速度変化 ②流れ方向に圧力勾配無し

③壁で化学反応無し(局所平衡の成立?) ④高Re数

低レイノルズ数モデル(Lam-Bremhorst 1981)

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \text{div}(\rho k U) &= \text{div} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \text{grad } k \right] + 2\mu_t S_{ij} \cdot S_{ij} - \rho \varepsilon \quad \text{---} \quad \text{D} \\ \frac{\partial(\rho \varepsilon)}{\partial t} + \text{div}(\rho \varepsilon U) &= \text{div} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \text{grad } \varepsilon \right] + C_{1\varepsilon} f_1 \frac{\varepsilon}{k} 2\mu_t S_{ij} \cdot S_{ij} \quad \text{---} \quad \text{E} \end{aligned} \quad (3.52)$$

$$\mu_t = \rho C_\mu f_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (3.51) \quad \text{---} \quad \text{E} \quad - C_{2\varepsilon} f_2 \rho \frac{\varepsilon^2}{k} \quad \text{---} \quad \text{E} \quad (3.53)$$

$$f_\mu = [1 - \exp(-0.0165 \text{Re}_y)]^2 \left(1 + \frac{20.5}{\text{Re}_t}\right) \quad f_1 = \left(1 + \frac{0.05}{f_\mu}\right)^3 \quad f_2 = 1 - \exp(-\text{Re}_t^2) \quad (3.54)$$

・壁面近傍の粘性底層($y^+ < 5$)で乱流Re応力の代わりに粘性応力を用いることを保証するために壁面damping関数が必要

・上式ではD、Eの補正項を消去しているが、他の低Re数モデル(例えばLaunder-Sharmaモデル)ではDとEを用いて、修正された消散率 $\tilde{\varepsilon}$ を用いている

(補足) Kato-Launderの修正モデル

★流れの衝突領域でk-εモデルの予測精度は大幅に低下
⇒垂直ひずみが乱れの生産に寄与、渦粘性を過大予測

$$P_k = \nu_t S \Omega \quad S = 2(S_{ij} S_{ij})^{0.5}, \Omega = 2(\Omega_{ij} \Omega_{ij})^{0.5},$$

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right), \quad \Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right)$$

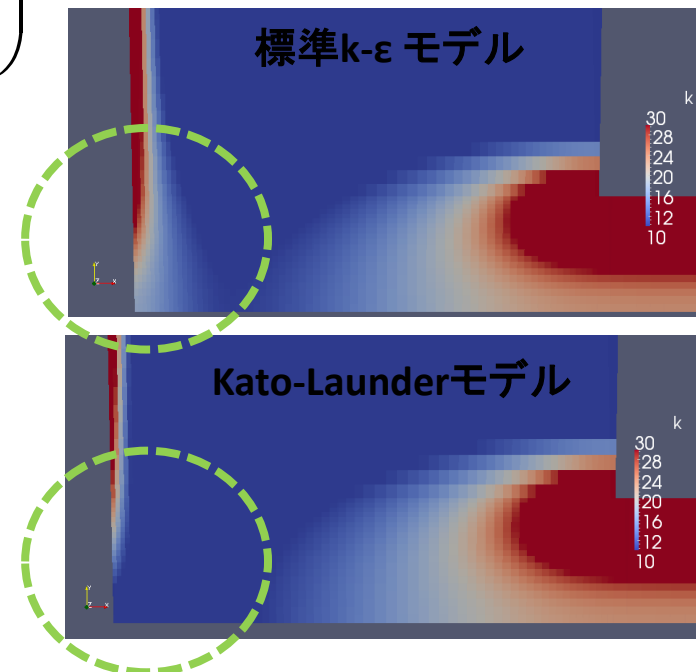
せん断ひずみが卓越

・・・従来と同じ形式の生産項

垂直ひずみが卓越

・・・生産が0となり乱れの過大評価を回避

壁面衝突流の乱流運動
エネルギー分布の差異



乱流モデルに関するTIPS

引用:計算力学ハンドブックⅡ 熱流体編 p52

●通常、乱流モデル提案者は単純な二次元乱流に基づいてモデル構築を行うので、検証計算も十分な格子数で実施している。
一方で、応用計算では三次元・複雑な流れ場が一般的なため、格子数の不足や急激な流れ場の変化で不安定になったり、発散する。

⇒モデルの性質を理解して、正しく使うことが重要

●二方程式モデル(特に標準k- ϵ モデル)は比較的安定に計算できるが、これは二方程式モデルで用いられる渦粘性が分子粘性の数百倍から数千倍に達しており、局所的にはRe数が約3桁小さい流れを計算していることに相当するためである。

⇒拡散効果が強く、局所的に層流か、それに近い流れ場と等価

k- ε モデルの評価

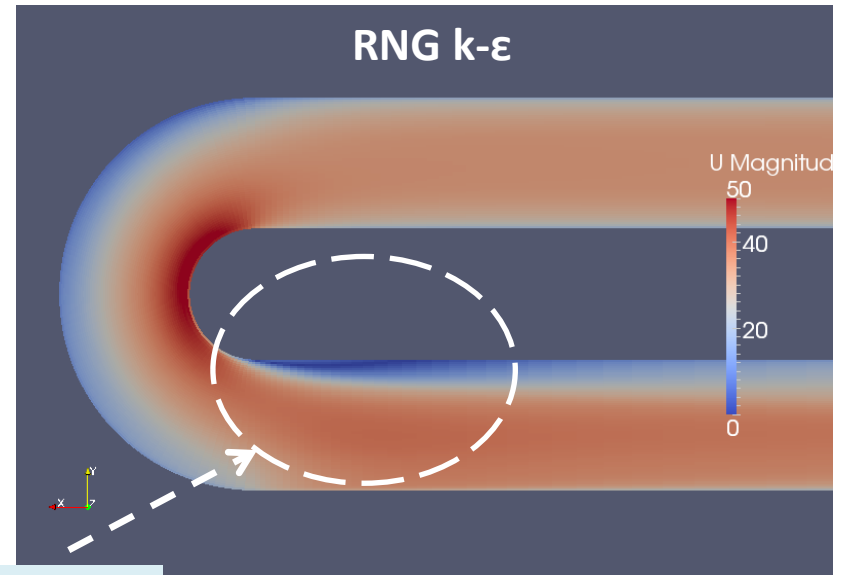
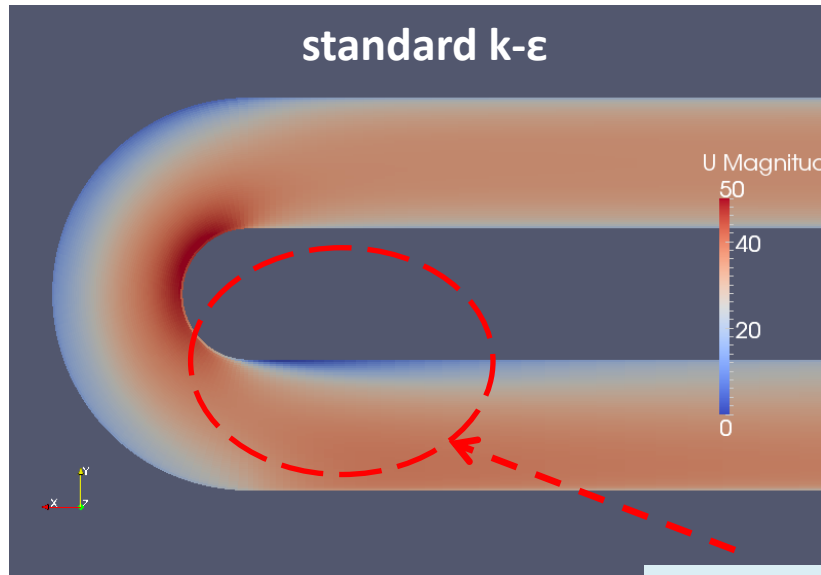
利点

- 初期条件や境界条件だけが必要な最も単純なモデル
- 産業に関連した多くの流れに対して優れた性能をもつ
- よく確立され、最も広く有効性が確認された乱流モデル

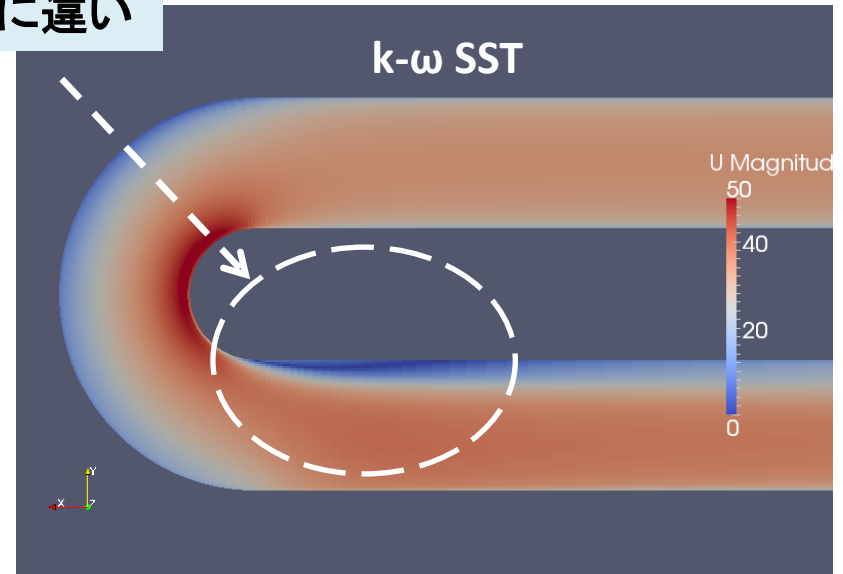
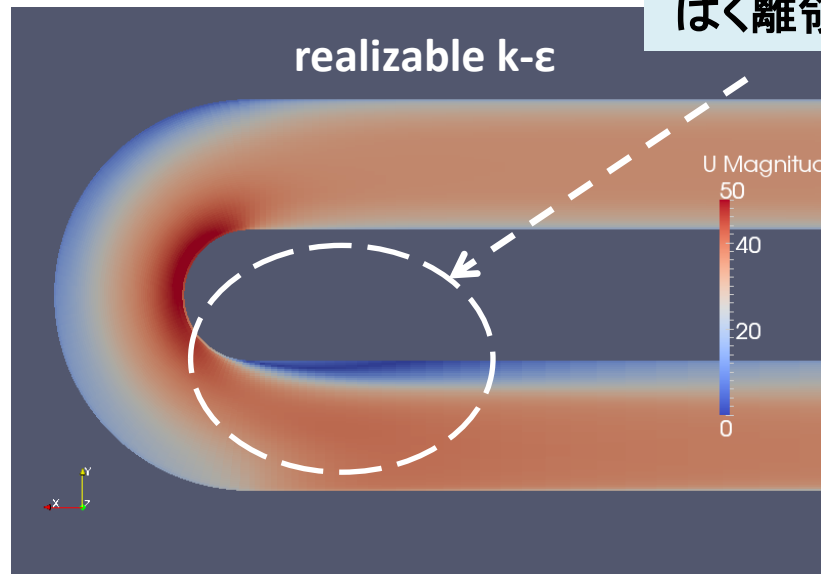
欠点

- 混合長モデルより計算負荷が大きい(2本の別の連立方程式)
- 以下のような場合には性能を発揮しない
 - (i) 内部流れでない流れ → 外部流れ Δ or $\times$
 - (ii) 外側を大きく歪む流れ(曲がった境界層、旋回流れなど)
 - (iii) 回転する流れ
 - (iv) 非等方的な垂直なレイノルズ応力により駆動する流れ
(円形でないダクト内の流れ・・・2次流れの予測精度 $\times$)

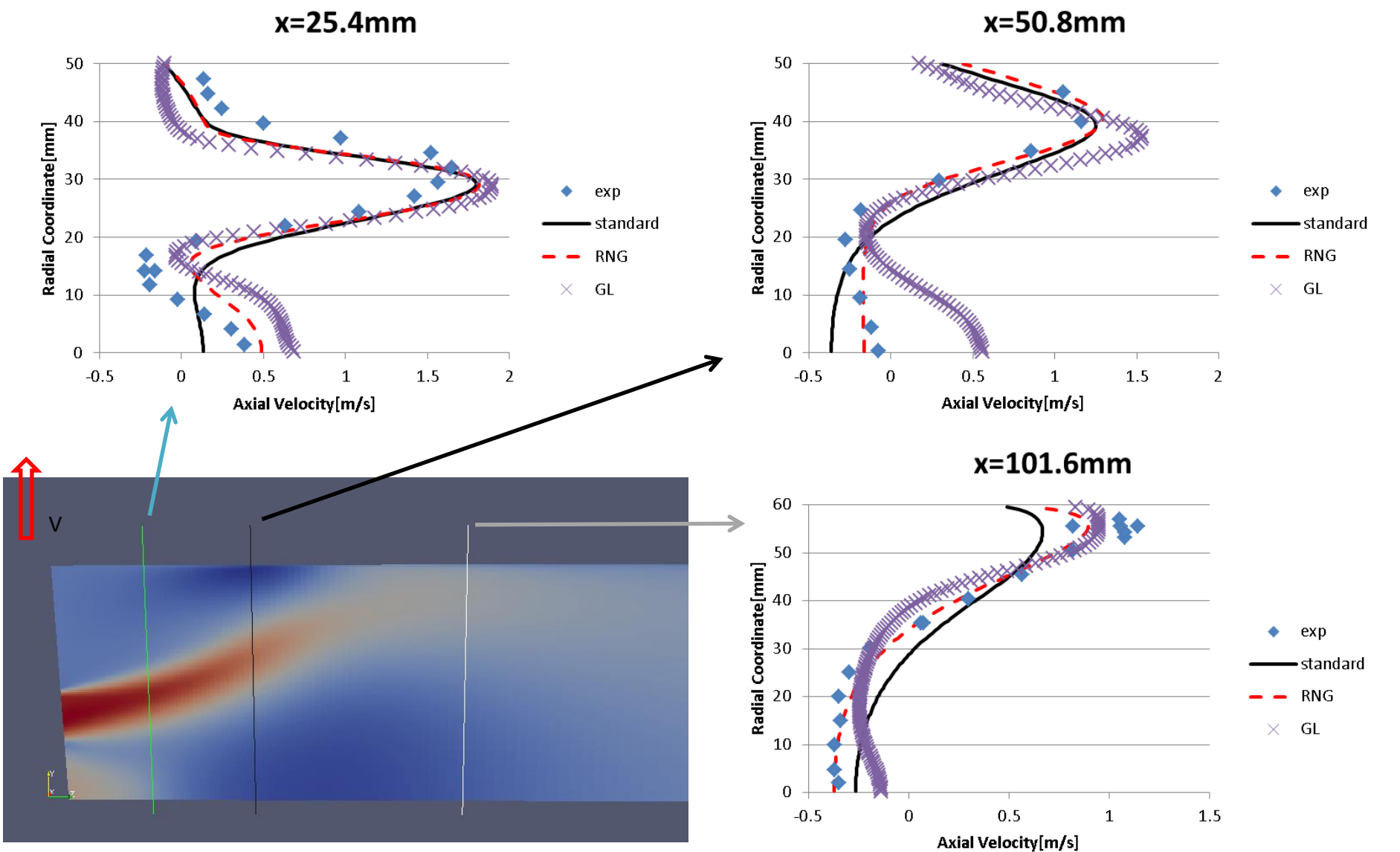
適用事例1 180° ベンド管



はく離領域に違い



適用事例2 旋回流れ場



次回

日程	パート部分	ページ
2014.03	第3章：乱流とそのモデリング 担当：3.7.3 レイノルズ応力方程式モデル	p.85～90

担当はどなたに？