

オープンCAE勉強会@関東

# 「数値流体力学」輪講

第5回

## 第3章：乱流とそのモデリング(4)

[3.7～3.7.1、p.69～75]

日時：2014年1月18日、14:00～

場所：日本ESI@新宿

# 「数値流体力学」輪講に関して

## 目的

数値流体力学の知識(特に理論ベース)を深め、  
OpenFOAMの利用に役立てること。

## 本輪講で学ぶもの

数値流体力学の理論や計算手法の概要。

# 書籍

## 数値流体力学【第2版】

原著： H. K. Versteeg & W. Malalasekera

共訳： 松下洋介、齋藤泰洋  
青木秀之、三浦隆利

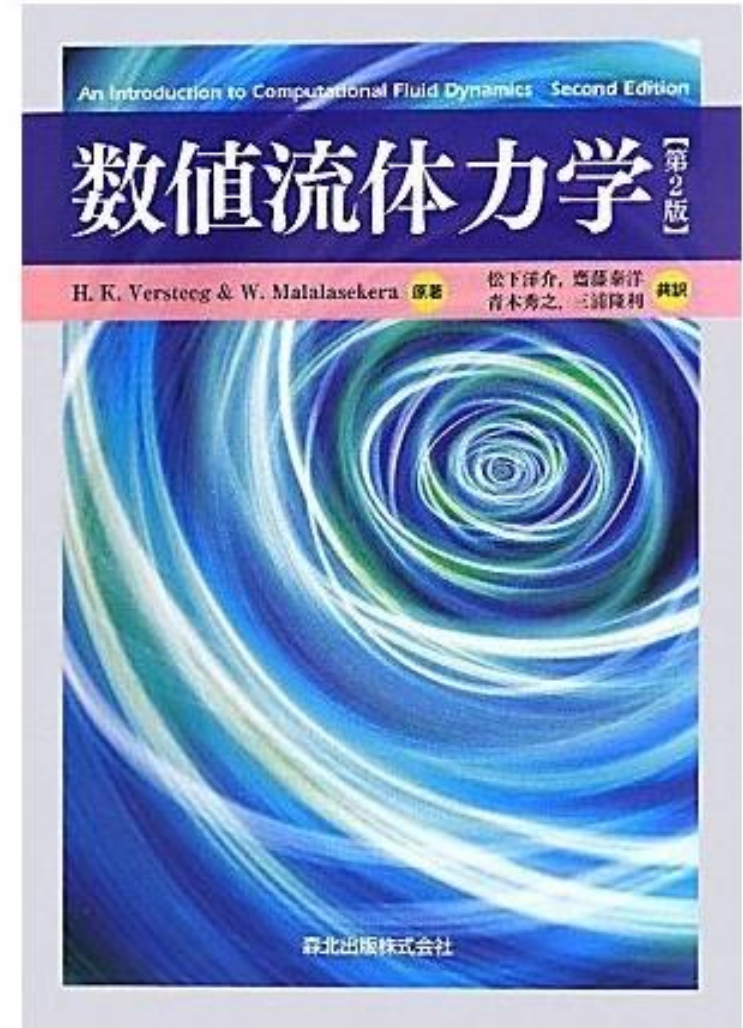
出版社： 森北出版株式会社

出版年月： 2011年7月

価格： 9975円 ← 高い…

ページ数： 544ページ ← 量が多い…

※ 有限体積法を説明した書籍(和書)の中では、最も丁寧に記述されている。



# 本日

日程	パート部分	ページ
2014.01	第3章：乱流とそのモデリング 担当セクション：3.7～3.7.1	p.69～75

# 内容

- ・ レイノルズ平均ナビエ-ストークス方程式(RANS)と古典的な乱流モデル …… 3.7 (p.69～75)

# 乱流モデル

連続の式:  $\text{div } \mathbf{U} = 0$

レイノルズ応力

レイノルズ平均ナビエ-ストークス方程式(RANS)

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} + \text{div}(UU) &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \text{div}(\text{grad } U) + \frac{1}{\rho} \text{div}(-\rho \overline{u'u'}) \\ \frac{\partial V}{\partial t} + \text{div}(VU) &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \nu \text{div}(\text{grad } V) + \frac{1}{\rho} \text{div}(-\rho \overline{v'u'}) \\ \frac{\partial W}{\partial t} + \text{div}(WU) &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \nu \text{div}(\text{grad } W) + \frac{1}{\rho} \text{div}(-\rho \overline{w'u'}) \end{aligned} \right.$$

方程式の数 : 4  
変数の数 : 10

方程式は解けない  
(平均速度3、圧力、レイノルズ応力6)



レイノルズ応力は別に予測

方程式の数 : 4  
変数の数 : 4

方程式は解ける  
(平均速度3、圧力)



乱流モデル

# 乱流モデルの種類

乱流モデルで解くべき方程式の数	名前
0	混合長モデル
1	Spalart-Allmarasモデル
2	k- $\epsilon$ モデル K- $\omega$ モデル 代数応力モデル
7	レイノルズ応力モデル

# 渦粘性近似

ブシネスク(Boussinesq)は、ニュートンの粘性則の類推より、レイノルズ応力を次のように表現した。

$$\tau_{ij} = -\overline{\rho u'_i u'_j} = \underbrace{\mu_t}_{\text{渦粘性係数}} \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \underbrace{\rho k}_{\text{乱流運動エネルギー}} \delta_{ij}$$

渦粘性係数

乱流運動エネルギー

$$k = \frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i} = \frac{1}{2} (\overline{u'u'} + \overline{v'v'} + \overline{w'w'})$$

これを渦粘性近似(乱流粘性近似)と呼ぶ。

渦粘性近似では、渦粘性係数や乱流運動エネルギーの予測が必須。



# 乱流拡散

運動量の乱流輸送 ⇒ 平均速度勾配に比例すると仮定

スカラー変数の乱流輸送

⇒ 輸送される変数の平均値の勾配に比例すると仮定

$$-\overline{\rho\phi'u'_i} = \Gamma_t \frac{\partial\Phi}{\partial x_i}$$

乱流拡散係数

これを乱流勾配拡散近似と呼ぶ。

乱流拡散係数は渦粘性係数に比例する形式で与えることが多い。

# 混合長モデル①

渦動粘性係数  $\nu_t = \frac{\mu_t}{\rho}$

渦動粘性係数は次元解析より次のように与える。

$$\nu_t = c\theta l$$

$c$ : 任意定数

$\theta$ : 乱流の速度スケール

$l$ : 乱流の長さスケール

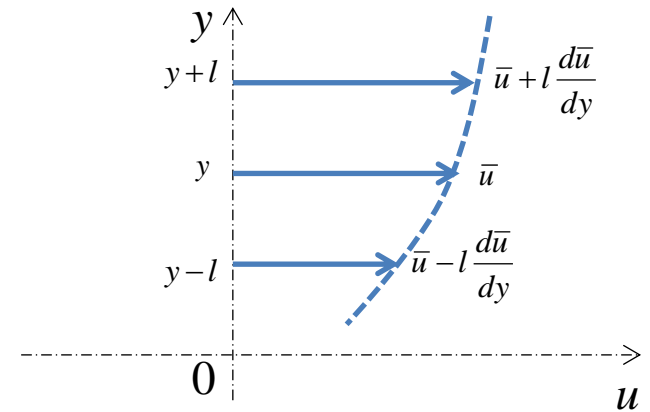
# 混合長モデル②

平均速度分布が2次元的な流れ場において...

右図より、 $y+l$ および $y-l$ の流速をテイラー展開を用いて示す。

$$\bar{u}_{y+l} = \bar{u} + l_u \frac{d\bar{u}}{dy} + \frac{l_u^2}{2} \frac{d^2\bar{u}}{dy^2} + \dots$$

$$\bar{u}_{y-l} = \bar{u} - l_u \frac{d\bar{u}}{dy} + \frac{l_u^2}{2} \frac{d^2\bar{u}}{dy^2} - \dots$$



$y+l$ 層の流体塊が $y$ 層に到達した場合、および $y-l$ の流体塊が $y$ 層に到達した場合、 $x$ 方向の速度変動は次のように表される。

$$\bar{u}'_{y+l} = \bar{u}_{y+l} - \bar{u} \approx l_u \frac{d\bar{u}}{dy} \quad \bar{u}'_{y-l} = \bar{u} - \bar{u}_{y-l} \approx l_u \frac{d\bar{u}}{dy}$$

# 混合長モデル③

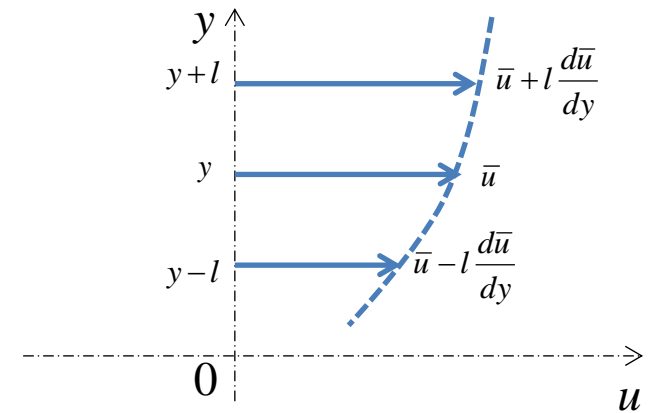
$$\bar{u}' = \frac{1}{2} (\bar{u}'_{y+l} + \bar{u}'_{y-l}) = l_u \frac{du}{dy}$$

また、 $\bar{u}' \propto \bar{v}'$  とすると、

$$\bar{v}' = l_v \frac{du}{dy}$$

$|\overline{u'v'}| \approx |\bar{u}'\bar{v}'|$  とすると、

$$|\overline{u'v'}| \approx l^2 \left( \frac{du}{dy} \right)^2 \quad l = \sqrt{\alpha l_u l_v}$$

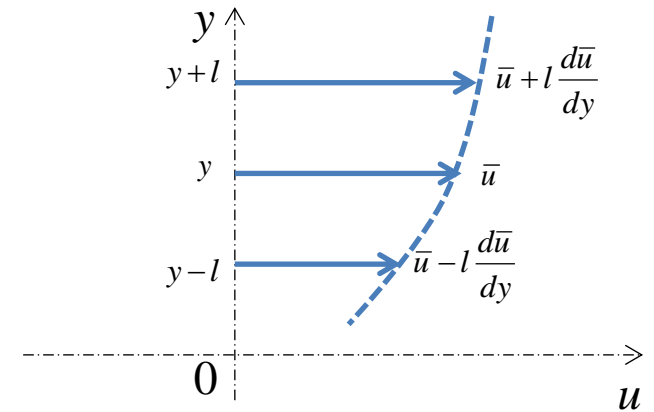


$\alpha$ : uv相関係数

# 混合長モデル④

$$|\overline{u'v'}| \approx l^2 \left( \frac{du}{dy} \right)^2$$

これをもとにレイノルズ応力の  
渦粘性モデルを作ってみる。



$$\tau_t = -\rho \overline{u'v'} = \rho l^2 \left| \frac{du}{dy} \right| \frac{du}{dy} = \rho \nu_t \frac{du}{dy} \quad \left( \nu_t = l^2 \left| \frac{du}{dy} \right| \right)$$

プラントル(Prandtl)の混合距離の仮説

$l$ : 混合距離

# 混合長モデル⑤

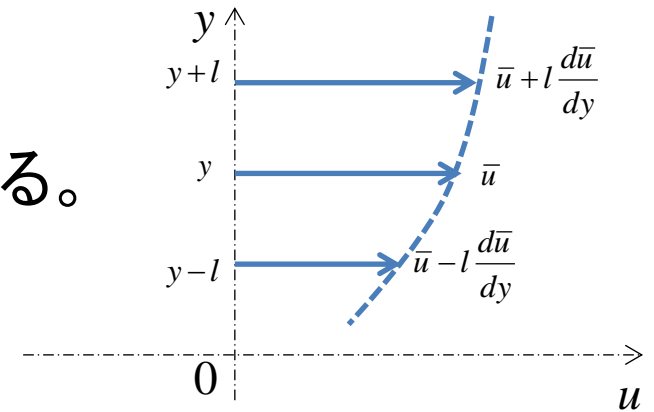
壁面近くの混合距離

⇒ 壁面に束縛され、混合距離  $l$  は  
壁面からの距離  $y$  に比例すると考えられる。

$$l = \kappa y$$

$$\tau_t = -\rho \overline{u'v'} = \rho \kappa^2 y^2 \left| \frac{du}{dy} \right| \frac{du}{dy}$$

$\kappa$  はカルマン定数といい、 $\kappa = 0.41$  で与えることが多い。



# 2次元乱流流れに対する混合長

流れ	混合長 $l_m$	$L$
混合層	$0.07L$	層の幅
噴流	$0.09L$	噴流の幅半分
後流	$0.16L$	後流の幅半分
軸対称の噴流	$0.075L$	噴流の幅半分
境界層 ( $\partial p/\partial x = 0$ )		
粘性底層と対数則層 ( $y/L \leq 0.22$ )	$\kappa y[1 - \exp(-y^+/26)]$	境界層厚さ
外部層 ( $y/L \geq 0.22$ )	$0.09L$	
円管とダクト流路 (完全発達流れ)	$L[0.14 - 0.08(1 - y/L)^2 - 0.06(1 - y/L)^4]$	円管半径もしくはダクトの幅半分

# 乱流における円管内の速度分布①

壁面近傍におけるプラントルの混合距離理論より、

$$\tau_0 = \rho \kappa^2 y^2 \left( \frac{du}{dy} \right)^2$$

ただし、 $du/dy > 0$ は正なので、絶対値符号を除去している。

$$\frac{du}{dy} = \frac{u_\tau}{\kappa y} \quad \left( u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \right) \quad u_\tau: \text{摩擦速度}$$

上式を積分すると、

$$\frac{u}{u_\tau} = \frac{1}{\kappa} \ln y + C \quad C: \text{積分定数}$$



# 乱流における円管内の速度分布②

壁面近傍の流れ  $\Rightarrow$   $\rho$ 、 $\nu$ 、 $\tau_0$ および $y$ に支配

$$\text{また、} u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}$$

換言すると

壁面近傍の流れ  $\Rightarrow$   $\nu$ 、 $u_\tau$ および $y$ に支配

壁面近くの速度分布はレイノルズ数に無関係

これら支配量( $\nu$ 、 $u_\tau$ 、 $y$ )から作られる無次元長さを $y^+$ とすると、

$$y^+ = \frac{u_\tau y}{\nu}$$

壁面近くの流速分布は、

$$\frac{u}{u_\tau} = f(y^+)$$

(プラントルの)壁法則

# 乱流における円管内の速度分布③

$$\frac{u}{u_\tau} = \frac{1}{K} \ln y + C \quad C: \text{積分定数}$$

壁法則が成立することを考え、レイノルズ数に依存しない普遍的な式を作る。

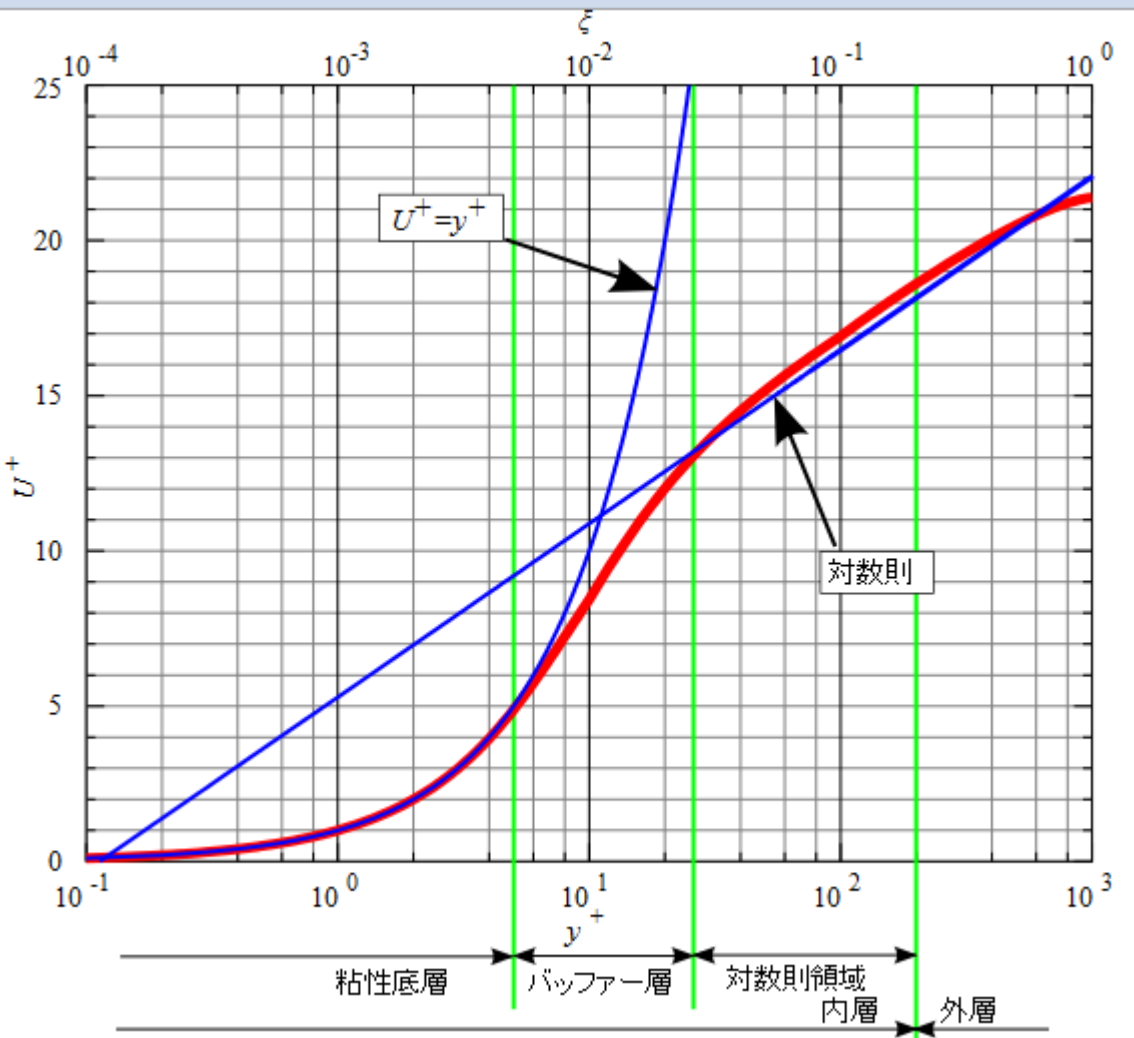
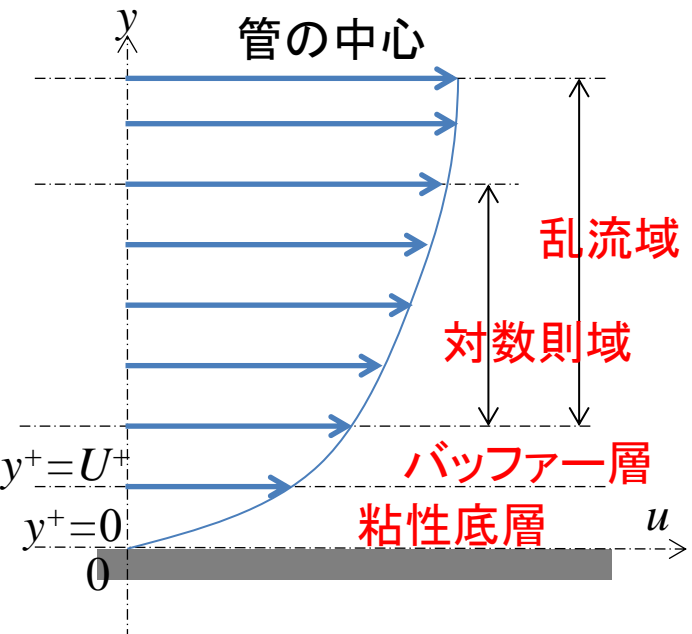
$$\frac{u}{u_\tau} = \frac{1}{K} \ln y^+ + A \quad A: \text{普遍定数}$$

また、実験結果より  $K=0.4$ 、 $A=5.5$  になる。

$$\frac{u}{u_\tau} = 2.5 \ln y^+ + 5.5 \quad \left( y^+ = \frac{u_\tau y}{\nu} \right)$$

**対数分布則**

# 乱流における円管内の速度分布④



※ 右図: Wikipediaより

# 混合長モデルの評価

---

## 利点

- 実装するのが容易であり，計算負荷の観点から安価である
- 噴流，混合層，後流や境界層である薄いせん断層に対して精度がよい
- 確立されている

## 欠点

- 分離や再循環を伴う流れを完全に記述することができない
  - 平均流れの変数と乱流粘性応力しか計算できない
-

# 次回

日程	パート部分	ページ
2014.02	第3章：乱流とそのモデリング 担当セクション：3.7.2	p.76～83

次回引き続き、私が輪講を担当します。