OpenFOAM勉強会 for beginner @ 関東

「数値流体力学」輪講
～ 準備編 ～

第2回
ベクトル解析の基礎

日時：2013年3月2日、14:10～
場所：日本ESI@新宿

「数値流体力学」輪講に関して

目的

数値流体力学の知識(特に理論ベース)を深め、
OpenFOAMの利用に役立てること。

本輪講で学ぶもの

数値流体力学の理論や計算手法の概要。

書籍

数値流体力学【第2版】

原著： H. K. Versteeg & W. Malalasekera

共訳： 松下洋介、斎藤泰洋
青木秀之、三浦隆利

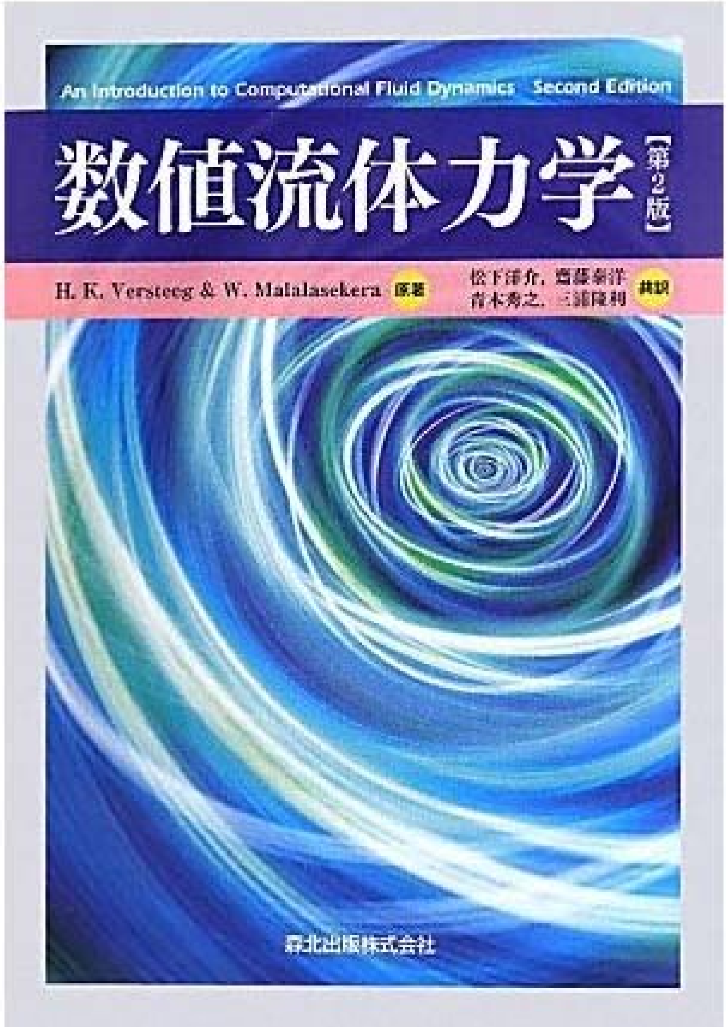
出版社： 森北出版株式会社

出版年月： 2011年7月

価格： 9975円 ← 高い･･･

ページ数： 544ページ ← 量が多い･･･

※ 有限体積法を説明した書籍(和書)の中では、最も丁寧に記述されている。



書籍の共同購入について

本書籍の購入をお勧めします

(大変恐縮ですが･･･)

出版元に問い合わせたところ･･･

⇒ 勉強会でのコピー使用はNG。

⇒ 10冊以上のまとめて購入すれば割引価格で購入(1割引?)。

↓

共同購入したいと思います。

現在、5人程度が共同購入に名乗りを上げています。

共同購入の参加者は次回勉強会(2013.4)でフィックスします。

※ 本書籍の購入はマストではありません。

輪講では、本書籍を持っていなくても、参加しやすいように工夫していきます。 ➡ 資料の工夫、テキスト見せ合いなど･･･

進め方

	日程	内容
準備編	2013年1月	微分積分の復習
	2013年3月	ベクトル解析の基礎1
	2013年4月	ベクトル解析の基礎2
本編	2013年5月～	前ページの書籍の輪講

スカラーとベクトル

スカラー　・・・　大きさのみを持つ量

ベクトル　・・・　大きさ＋方向を持つ量

スカラー量の例：　速さ、　長さ、　エネルギー・・・

ベクトル量の例：　速度、　位置、　加速度(力)・・・

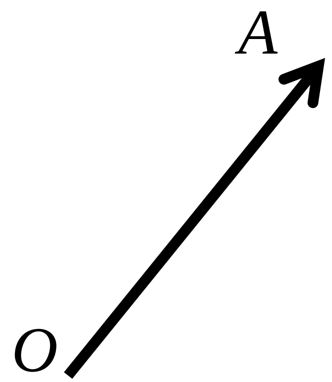
スカラー量のみの計算は、四則演算や微積分など・・・
これまで学んできた解析手法がそのまま使える。

⇩

ベクトルの取扱いはちょっと違う

ベクトルの表記方法

空間上に点Oと点Aの2点があるとする。
点Oを始点、点Aを終点として、この間を
結んだ線分(有向線分)がベクトルである(右図)。



有向線分を元にしたベクトル表記: $\overrightarrow{OA}$

高校での数学でのベクトルはこの表記(だったと思う)。

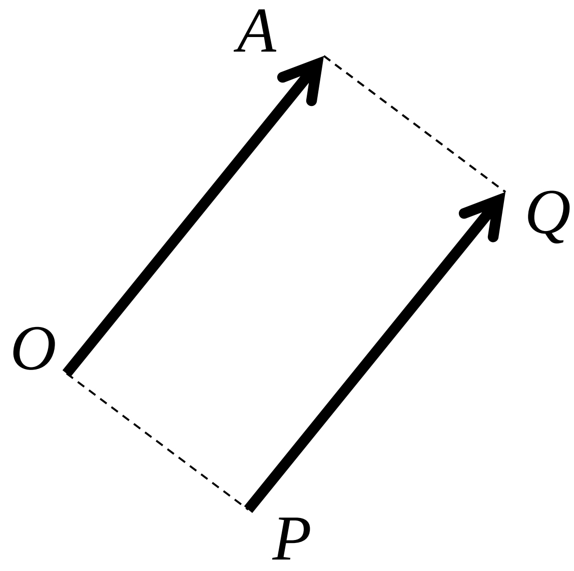
ここからは･･･

ベクトル量は太字のアルファベットを用いて表す

$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$、$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$･･･など

同じベクトル

右図のように $\overrightarrow{OA}$ とは別に $\overrightarrow{PQ}$ があるとすると、点P、Qが点O、Aと異なる位置にあったとしても、方向と長さが同じであれば、これらは同一のベクトルである。



$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{PQ}$$

また、始点を点A、終点を点Oとした場合のベクトル $\overrightarrow{AO}$ は

$$\overrightarrow{AO} = -\overrightarrow{OA}$$

($\overrightarrow{OA}$ の逆ベクトル)

と表すことができ、 $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{PQ}$ から、

$$\overrightarrow{AO} = -\overrightarrow{PQ}$$

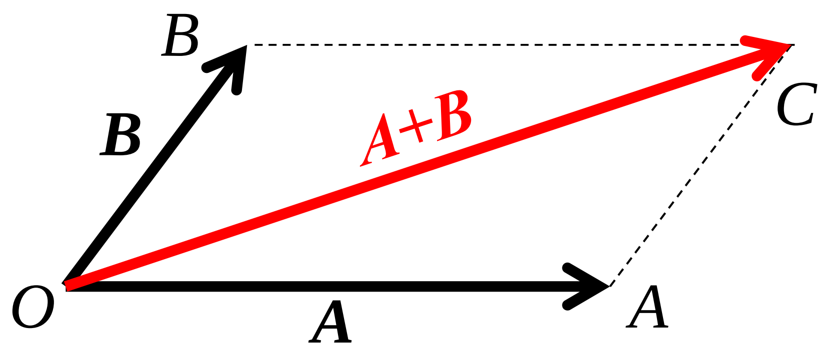
が言える。

ベクトルの和、差

$\overrightarrow{OA} = \boldsymbol{A}$ 、 $\overrightarrow{OB} = \boldsymbol{B}$ 　とする。

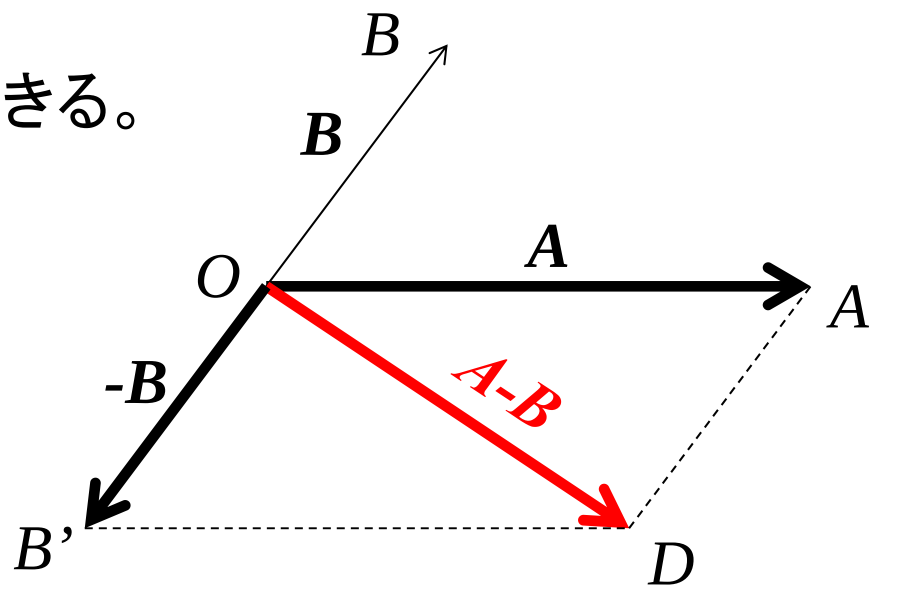
ベクトルの演算では、$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$ は、

右図の $\overrightarrow{OC}$ に対応する(定義)



⬇

$\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}$ は、右下図のように定義できる。



ベクトル演算の公式

零ベクトル: $\boldsymbol{O}$　・・・始点と終点が同一点のベクトル

$$\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A} = \boldsymbol{O}$$

ベクトルの絶対値: $|\boldsymbol{A}|$　・・・ベクトル$\boldsymbol{A}$の長さを示す

単位ベクトル　・・・長さ1のベクトルで、$\boldsymbol{A}$の単位ベクトルは
次のように表される。

$$\frac{\boldsymbol{A}}{|\boldsymbol{A}|}$$

ベクトルとスカラーの積　・・・ほとんどの場合、通常の代数演算と対応する。

$$(a+b)\boldsymbol{A} = a\boldsymbol{A} + b\boldsymbol{A}$$

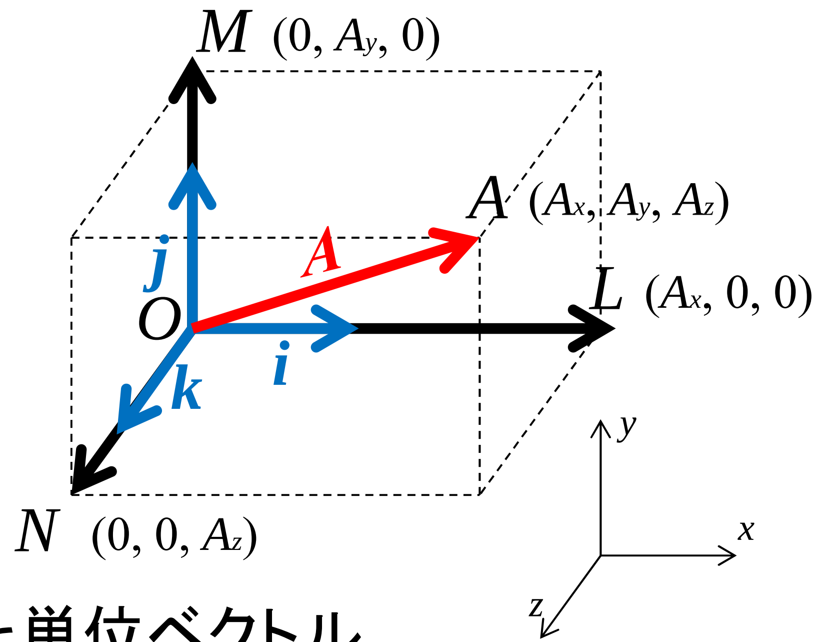
$$a(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) = a\boldsymbol{A} + a\boldsymbol{B}$$

$$a(b\boldsymbol{A}) = (ab)\boldsymbol{A}$$

直交座標系とベクトル

(x, y, z)の直交座標系を考え、
$\boldsymbol{A}$の成分を見てみる(右図)。

※　ここではOを原点とする。



$\boldsymbol{A}$の成分　$\Rightarrow (A_x, A_y, A_z)$

基本ベクトル

x、yおよびz軸上に正の向きに取った単位ベクトル

$\Rightarrow$ $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$とおく。

$$\overrightarrow{OL} = A_x \boldsymbol{i} \qquad \overrightarrow{OM} = A_y \boldsymbol{j} \qquad \overrightarrow{ON} = A_z \boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{A} = \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OL} + \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}$$

$$\boxed{\boldsymbol{A} = A_x \boldsymbol{i} + A_y \boldsymbol{j} + A_z \boldsymbol{k}}$$

ベクトルの内積(スカラー積)①

内積の表記

ベクトル$\boldsymbol{A}$と$\boldsymbol{B}$の内積 ⇒ $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$

内積の定義

$$\boxed{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\cos\theta}$$

$\boldsymbol{A}$の成分 ⇒ (A_x, A_y, A_z)

$\boldsymbol{B}$の成分 ⇒ (B_x, B_y, B_z)

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z}$$

ベクトルの内積(スカラー積)②

<u>内積の意味</u>

ベクトル$\boldsymbol{A}$と$\boldsymbol{B}$の角度関係 ⇒ $\cos\theta = \dfrac{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}}{|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|}$

⬇

$\boldsymbol{A}$・$\boldsymbol{B}$=0でθ=90° となることから、
内積を見ることでベクトル同士の直交関係を把握しやすい。

<u>内積の公式</u>

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C} + \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C}$$

$$(\alpha\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{B} = \alpha\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$$

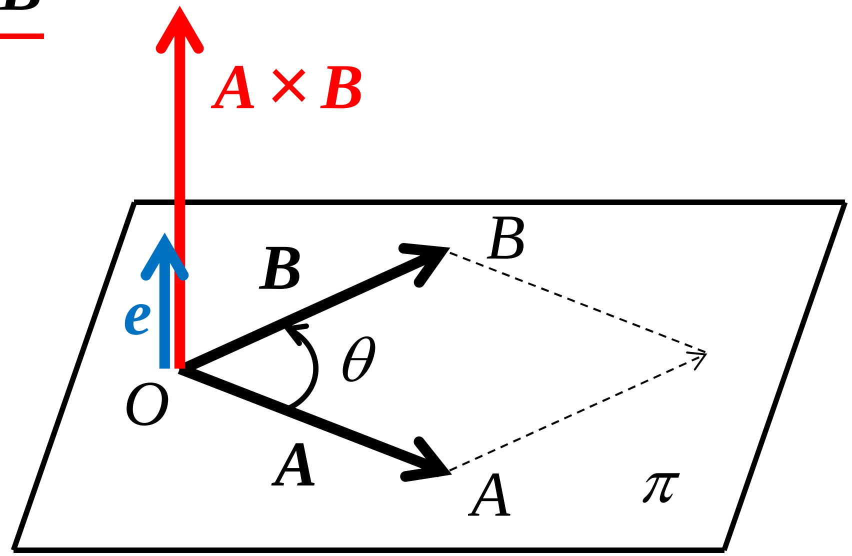
ベクトルの外積(ベクトル積)①

外積の表記

ベクトル$\boldsymbol{A}$と$\boldsymbol{B}$の外積　⇒　$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$

外積の定義

右図のようにベクトル$\boldsymbol{A}$と$\boldsymbol{B}$が与えられたとき、$\boldsymbol{A}$と$\boldsymbol{B}$を含む平面が定まり、その平面上πにおいて、$\boldsymbol{A}$と$\boldsymbol{B}$のなす角度θが分かる。



また、平面πに垂直な単位ベクトルを$\boldsymbol{e}$とする。

このとき、ベクトル$\boldsymbol{A}$と$\boldsymbol{B}$の外積は次のように与えられる。

$$\boxed{\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=(|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\sin\theta)\boldsymbol{e}}$$

ベクトルの外積(ベクトル積)②

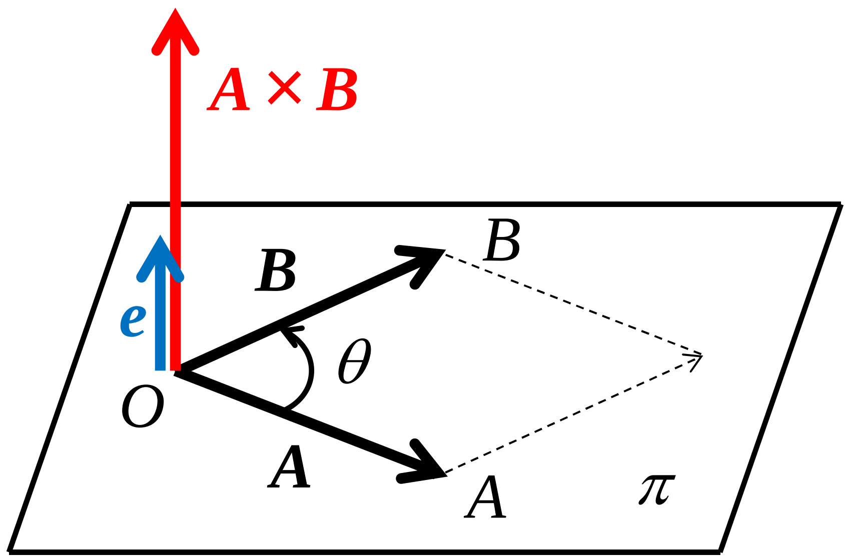
外積の定義

$$\boxed{\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=(|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\sin\theta)\boldsymbol{e}}$$

上式中の $|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\sin\theta$ は、
右図の平行四辺形の面積に
対応する。

$\boldsymbol{A}$の成分 $\Rightarrow (A_x, A_y, A_z)$

$\boldsymbol{B}$の成分 $\Rightarrow (B_x, B_y, B_z)$



$$\boxed{\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}}$$

ベクトルの微分

ベクトル$\boldsymbol{A}$がある変数tの連続な関数であるとき、
$\boldsymbol{A}$はtに関する微分が可能です。

$$\frac{d\boldsymbol{A}}{dt} \Rightarrow$$ ベクトル$\boldsymbol{A}$のtに関する微係数(微ベクトル)

例：変位(ベクトル量)の時間微分は速度(ベクトル量)

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{x}}{dt}$$

※　ベクトル関数の長さに関する微分も可能であるが、
ここでは説明を割愛する。

スカラー場、ベクトル場

空間の各点にスカラーまたはベクトルが対応して、
点の位置の関数になっているとき、この関数が定義される
領域をスカラー場、ベクトル場と言う。

<u>流体の場合</u>

スカラー場：　圧力、温度、濃度・・・

ベクトル場：　流速

スカラー場の勾配

(x, y, z)の直交座標系において、スカラー場$f(x, y, z)$があるとする。

このスカラー場fに対して、偏微分係数:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

を成分とするベクトル場を作ることができる。

このベクトル場を**勾配**と呼び、grad fで表す。

$$\boxed{\mathrm{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k}}$$

※ $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$は$x, y, z$成分の基本ベクトル

Hamiltonの演算子：∇

$$\boxed{\nabla = \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}}$$

∇は、**ナブラ**とも呼ばれる。

また、$\boxed{\mathrm{grad} f = \nabla f}$である。

∇に関して以下の関係が成り立つ。

c_1、c_2を任意定数、f_1、f_2、fを任意のスカラー場とする。

$$\nabla(c_1 f_1 + c_2 f_2) = c_1 \nabla f_1 + c_2 \nabla f_2$$

$$\nabla(f_1 f_2) = f_1 \nabla f_2 + f_2 \nabla f_1$$

$$\nabla f = 0 \quad \Rightarrow \quad f = const.$$

ベクトル場の発散①

(x, y, z)の直交座標系において、ベクトル場$\boldsymbol{A}$ (A_x, A_y, A_z)があるとする。

$$\boxed{\mathrm{div}\boldsymbol{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}}$$

これを$\boldsymbol{A}$の**発散**と呼ぶ。

また、Hamilton演算子と$\boldsymbol{A}$の内積を取ると、

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = \left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z} \right)\left(A_x \boldsymbol{i} + A_x \boldsymbol{j} + A_x \boldsymbol{k} \right)$$

$$= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\boxed{\mathrm{div}\boldsymbol{A} = \nabla \cdot \boldsymbol{A}}$$

ベクトル場の発散②

発散に関して以下の関係が成り立つ。
なお、$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$は任意のベクトル場、fは任意のスカラー場とする。

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) = \nabla \cdot \boldsymbol{A} + \nabla \cdot \boldsymbol{B}$$

$$\nabla \cdot (f\boldsymbol{A}) = f(\nabla \cdot \boldsymbol{A}) + \boldsymbol{A} \cdot (\nabla f)$$

Laplaceの演算子(ラプラシアン)①

ベクトル$\boldsymbol{A}$がスカラー場fの勾配に等しいとき、

$$\boldsymbol{A} = \mathrm{grad} f = \nabla f$$

※ fを$\boldsymbol{A}$のスカラーポテンシャルと言う

このとき$\mathrm{div}\boldsymbol{A}$は、

$$\boxed{\begin{aligned}\mathrm{div}\boldsymbol{A} &= \mathrm{div}(\mathrm{grad} f) = \nabla \cdot \nabla f \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\end{aligned}}$$

ここで∇・∇に対応する演算子∇^2を設定する。

$$\boxed{\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}}$$

これを**Laplaceの演算子**、あるいは**ラプラシアン**と言う。

Laplaceの演算子(ラプラシアン)②

$$\mathrm{div}(\mathrm{grad}f) = \nabla^2 f$$

演算子∇^2はΔと書いたりする。

ベクトル場の回転

ベクトル場$\boldsymbol{A}$の**回転**は $\mathrm{rot}\boldsymbol{A}$ 、あるいは $\mathrm{curl}\boldsymbol{A}$ と書く。

$$\boxed{\mathrm{rot}\boldsymbol{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}}$$

また $\mathrm{rot}\boldsymbol{A}$ は、

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

なので、$\mathrm{rot}\boldsymbol{A}$ を $\nabla \times \boldsymbol{A}$ という形式で書かれる

grad、div、rotに関する主な公式

$$\mathrm{rot}(\mathrm{grad}f) = \boldsymbol{O}$$

$$\mathrm{div}(\mathrm{rot}\boldsymbol{A}) = 0$$

$$\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\boldsymbol{A}) = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{A}) - \nabla^2 \boldsymbol{A}$$

$$\mathrm{div}(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{rot}\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{rot}\boldsymbol{B}$$

$$\mathrm{grad}(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{A} \cdot \nabla)\boldsymbol{B} + (\boldsymbol{B} \cdot \nabla)\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A} \times \mathrm{rot}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{B} \times \mathrm{rot}\boldsymbol{A}$$

$$\mathrm{rot}(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{B} \cdot \nabla)\boldsymbol{A} - (\boldsymbol{A} \cdot \nabla)\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}\mathrm{div}\boldsymbol{B} - \boldsymbol{B}\mathrm{div}\boldsymbol{A}$$

他にも色々な公式があります・・・

おわりに

本講義では、数値流体力学輪講の準備のため、
ベクトル解析の概要を振り返りました。

ベクトル解析のもう少し突っ込んだ話と、流体力学に
最低限必要なテンソル解析の話題提供します。

ご清聴ありがとうございました