OpenFOAM勉強会 for beginner @ 関東

「数値流体力学」輪講
～ 準備編 ～

第1回
微分積分の復習

日時 : 2013年1月27日、14:10～
場所 : 日本ESI@新宿

「数値流体力学」輪講に関して

目的

数値流体力学の知識(特に理論ベース)を深め、
OpenFOAMの利用に役立てること。

本輪講で学ぶもの

数値流体力学の理論や計算手法の概要。

書籍

数値流体力学【第2版】

原著： H. K. Versteeg & W. Malalasekera

共訳： 松下洋介、斎藤泰洋
青木秀之、三浦隆利

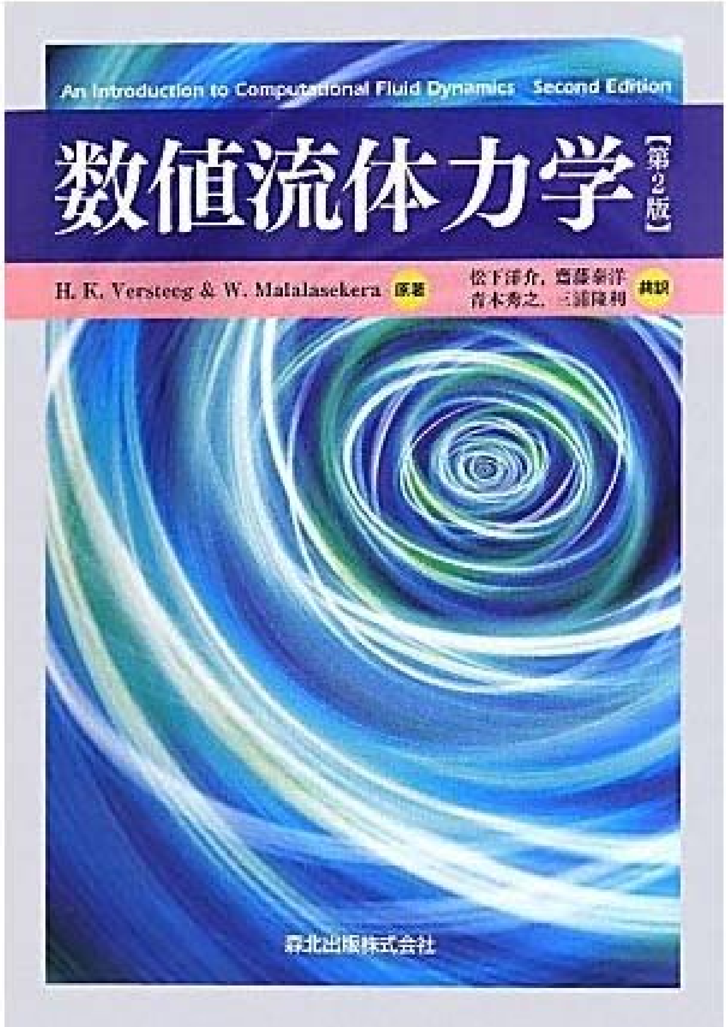
出版社： 森北出版株式会社

出版年月： 2011年7月

価格： 9975円 ← 高い・・・

ページ数： 544ページ ← 量が多い・・・

※ 有限体積法を説明した書籍(和書)の中では、最も丁寧に記述されている。



進め方

	日程	内容
準備編	2013年1月～	微分積分 ベクトル・テンソル解析の基礎 など・・・
本編	2013年4 or 5月～	書籍から(詳細は未定)

本編以降は、「輪講形式」で行いたいと思います。

微分の復習①

元の関数 → 微分 → 微分したもの(導関数)

$y = f(x)$ → y' 、$\dfrac{dy}{dx}$ 、$\dfrac{d}{dx}f(x)$ 、…

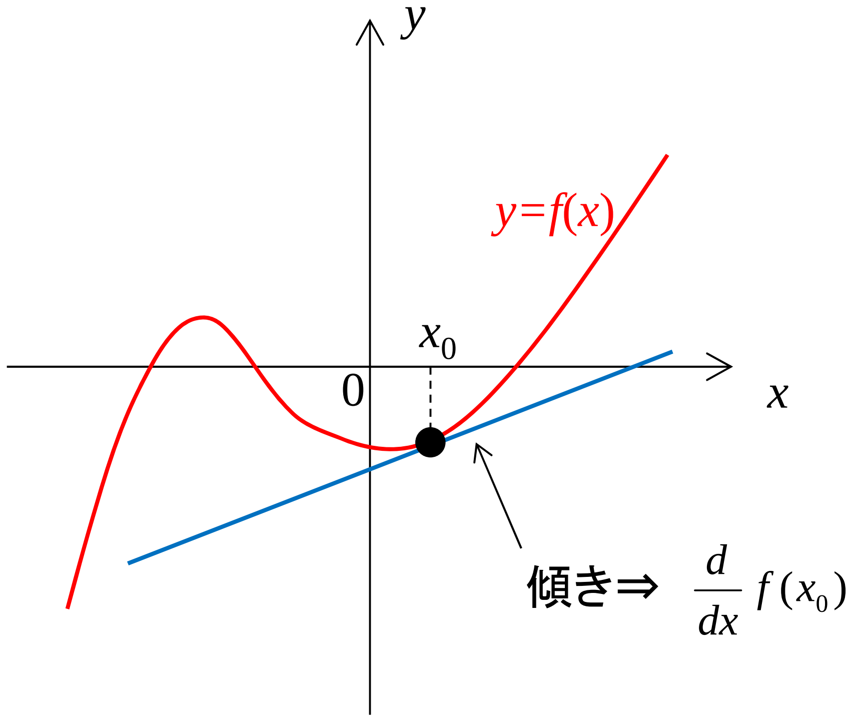
元の関数 y	導関数 y'
x^{α}	$\alpha x^{\alpha-1}$
$\cos x$	$-\sin x$
$\sin x$	$\cos x$
$\log\lvert x\rvert$	$1/x$
e^{x}	e^{x}

例)　$y = x^2$ の導関数を求めよ。

$$y' = 2x$$

微分の復習②

ある関数 y の導関数 y' は、y の接線の傾きである。



そもそも微分とは・・・

$y = f(x)$ において、

$$\boxed{y' = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}}$$

つまり、hが無限小の時の、$f(x+h)$と$f(x)$の差分を示している。

例) $y = x^2$ の導関数を求めよ。

$$y' = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2hx + h^2}{h} = \lim_{h \to 0}(2x + h)$$
$$= 2x$$

差分法

hを有限とし、$y=f(x)$の導関数を

$$y' \approx \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

のように、離散的に近似する手法を差分法と言う。

18世紀にEulerによって提案された(らしい)。

※ ちなみに、OpenFOAMの空間離散化手法である有限体積法は20世紀後半に提案された。

微分法の重要定理まとめ

① $\{\alpha f(x)\}' = \alpha f'(x)$　　(α: 定数)

② $\{f(x)+g(x)\}' = f'(x)+g'(x)$

③ $\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

④ $y=f(x)$、$z=g(y)$の時、

$$z' = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}\left(= \frac{d}{dy}g(y)\cdot\frac{d}{dx}f(x)\right)$$

⑤ $y=f(x)$の逆関数を$x=f^{-1}(y)$とすると、

$$\frac{dx}{dy} = 1\Big/\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

Taylor展開

[x, $x+h$]でn階まで連続な導関数を有し、さらに(x, $x+h$)でn+1階微分可能であるならば、

$$f(x+h) = f(x) + \frac{f'(x)}{1!}h + \frac{f''(x)}{2!}h^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}h^n$$
$$+ \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(x-\alpha h)}{(n+1)!}h^n}_{\text{剰余項}} \qquad (0 < \alpha < 1)$$

※ この式の証明は微分積分の本を参照してください。

Taylor展開と差分法

前ページのTayler展開の式より、hが十分小さい場合、

[右辺第2項]>>[右辺第3項]>>・・・

$$\frac{f'(x)}{1!}h \qquad \frac{f''(x)}{2!}h^2$$

となる。

ここで、右辺第3項以降は無視できるものと考えると、

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}}$$

← 8ページと同じ式

実際の差分法の様々な離散化手法はTaylor展開が起点となっている。

積分の考え方

ある$f(x)$関数に対して、

$$F'(x) = f(x)$$

を満たすような$F(x)$があるとする。($F(x)$は$f(x)$の原始関数と呼ぶ)

また、$\{F(x) - C\}' = F'(x) = f(x)$ ($C:$任意定数)なので、

$F(x) - C$ も原始関数になり、原始関数の一般形でもある。

また、原始関数の一般形を表す記号として $\int f(x)dx$ があり、

$F'(x) = f(x)$ のとき、 $F(x) = \int f(x)dx + C$ の関係が成り立つ。

積分公式(一部)

$$\int x^{\alpha} dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C \qquad (\alpha \neq -1)$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \log|x| + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int e^{x} dx = e^{x} + C$$

積分法の重要定理(まとめ)

① $\int \alpha f(x)dx = \alpha \int f(x)dx$

② $\int \{f(x) + g(x)\}dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

③ $x = \varphi(t)$ ならば、

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$ (置換積分法)

④ $f(x)g(x) = \int f'(x)g(x)dx + \int f(x)g'(x)dx$ (部分積分法)

⑤ $\boxed{f(x) = \int f'(x)dx = \int \frac{dy}{dx}dx}$

偏微分

関数の変数が2個以上ある場合の微分の取扱い手法

変数1個 ➡ 1次元(線上)の現象の取扱

変数2個 ➡ 2次元(面上)の現象の取扱

変数3個 ➡ 3次元(空間)の現象の取扱

⋮ ⋮

偏微分で対応

例) $z = f(x, y)$ の場合、

xに関する偏導関数 ➡ z_x 、 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 、 $\dfrac{\partial}{\partial x} f(x, y)$

yに関する偏導関数 ➡ z_y 、 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 、 $\dfrac{\partial}{\partial y} f(x, y)$

偏微分の公式

基本的に微分の公式と同じ

例えば、$\dfrac{\partial}{\partial x} f(x, y)$ の場合は、変数yを定数として考え、

xに関して微分をする。

全微分①

まず、1次元で・・・

$y=f(x)$ より、 $df=f(x+dx)-f(x)$ とおくと、

$$df=\frac{f(x+dx)-f(x)}{dx}dx$$

となり、dxが無限小をとると、

$$\boxed{df=y'dx=\frac{d}{dx}f(x)dx}$$

このdfをxの全微分と言う。

$df=f(x+dx)-f(x)$ であることからも分かるように、

全微分とは$f(x)$の微小変化量と考えることができる。

全微分②

2次元の全微分 $$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

➡ 面上でのfの微小変化量

3次元の全微分 $$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$

➡ 空間でのfの微小変化量

その他

Schwarzの定理

$$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y)$$

※ ただし、f_{xy}、f_{yx} が連続である場合に限る

重積分①

関数の変数が2個以上ある場合の積分の取扱い手法

変数1個 ➡ 1次元(線上)の現象の取扱

変数2個 ➡ 2次元(面上)の現象の取扱

変数3個 ➡ 3次元(空間)の現象の取扱

⋮ ⋮

重積分で対応

例)　2重積分

$$\iint_R f(x, y)dxdy \quad (R\text{: 2次元空間上の閉区間})$$

重積分②

R内で $f(x, y) = 1$ ならば

$$\iint_R dxdy = S$$

(S: 2次元空間の有界集合の面積)

例)　3重積分

$$\iint_R f(x, y, z)dxdydz \qquad (R\text{: 2次元空間上の閉区間})$$

$$\iint_R dxdydz = V$$

(V: 2次元空間の有界集合の体積)

おわりに

本講義では、数値流体力学輪講の準備のため、
微分積分の概要の復習を行いました。

次回は、微分積分のもう少し踏み込んだ内容、
ベクトル解析の導入部分に触れていきたいと思います。

ご清聴ありがとうございました