

オープンCAE勉強会@関東

「数値流体力学」輪講

第7回

第3章：乱流とそのモデリング(6)

[3.7.4、p.90～98]

日時：2014年3月23日、14:00～

場所：日本ESI@新宿

「数値流体力学」輪講に関して

目的

数値流体力学の知識(特に理論ベース)を深め、
OpenFOAMの利用に役立てること。

本輪講で学ぶもの

数値流体力学の理論や計算手法の概要。

書籍

数値流体力学【第2版】

原著： H. K. Versteeg & W. Malalasekera

共訳： 松下洋介、齋藤泰洋
青木秀之、三浦隆利

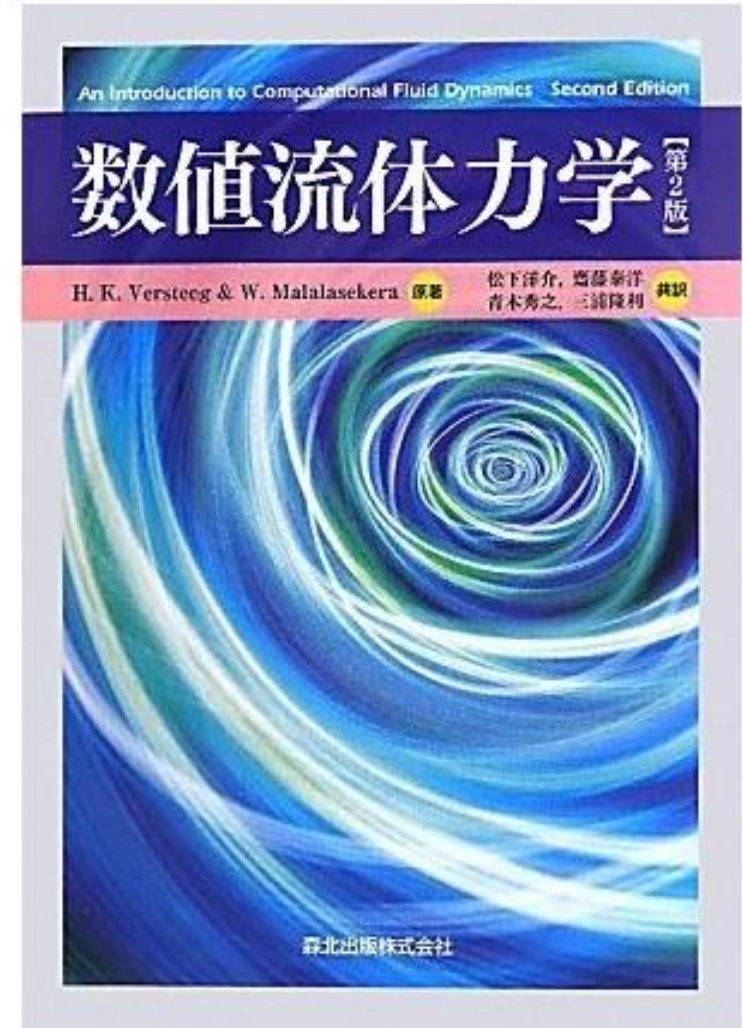
出版社： 森北出版株式会社

出版年月： 2011年7月

価格： 9975円 ← 高い…

ページ数： 544ページ ← 量が多い…

※ 有限体積法を説明した書籍(和書)の中では、最も丁寧に記述されている。



本日

日程	パート部分	ページ
2014.03	第3章：乱流とそのモデリング 担当セクション：3.7.4	p.90～98

内容

- ・ 高度な乱流モデル …… 3.7.4 (p.90～98)

乱流モデル

連続の式: $\text{div } \mathbf{U} = 0$

レイノルズ応力

レイノルズ平均ナビエ-ストークス方程式(RANS)

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} + \text{div}(UU) &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \text{div}(\text{grad } U) + \frac{1}{\rho} \text{div}(-\rho \overline{u'u'}) \\ \frac{\partial V}{\partial t} + \text{div}(VU) &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \nu \text{div}(\text{grad } V) + \frac{1}{\rho} \text{div}(-\rho \overline{v'u'}) \\ \frac{\partial W}{\partial t} + \text{div}(WU) &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \nu \text{div}(\text{grad } W) + \frac{1}{\rho} \text{div}(-\rho \overline{w'u'}) \end{aligned} \right.$$

方程式の数 : 4
変数の数 : 10

方程式は解けない
(平均速度3、圧力、レイノルズ応力6)



レイノルズ応力は別に予測

方程式の数 : 4
変数の数 : 4

方程式は解ける
(平均速度3、圧力)



乱流モデル

乱流モデルの種類

乱流モデルで解くべき方程式の数	名前
0	混合長モデル
1	Spalart-Allmarasモデル
2	k-εモデル k-ωモデル 代数応力モデル
7	レイノルズ応力モデル

渦粘性近似

ブシネスク(Boussinesq)は、ニュートンの粘性則の類推より、レイノルズ応力を次のように表現した。

$$\tau_{ij} = -\overline{\rho u'_i u'_j} = \underbrace{\mu_t}_{\text{渦粘性係数}} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \underbrace{\rho k}_{\text{乱流運動エネルギー}} \delta_{ij}$$

$k = \frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i} = \frac{1}{2} (\overline{u'u'} + \overline{v'v'} + \overline{w'w'})$

これを渦粘性近似(乱流粘性近似)と呼ぶ。

渦粘性近似では、渦粘性係数や乱流運動エネルギーの予測は少なくとも必要。

標準k-εモデル

乱流運動エネルギーkと消散率εの輸送方程式から、渦粘性係数を求める。

前回資料より

k、εそれぞれの輸送方程式と各定数

次元解析より渦粘性は右式のように定義できる $\mu_t = C_\mu \rho l = \rho C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}$ (3.44)

$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \text{div}(\rho k U) = \text{div}\left[\frac{\mu_t}{\sigma_k} \text{grad } k\right] + 2\mu_t S_{ij} \cdot S_{ij} - \rho \varepsilon$$
 (3.45)

変化割合 対流による輸送 拡散による輸送 生成割合 消散割合

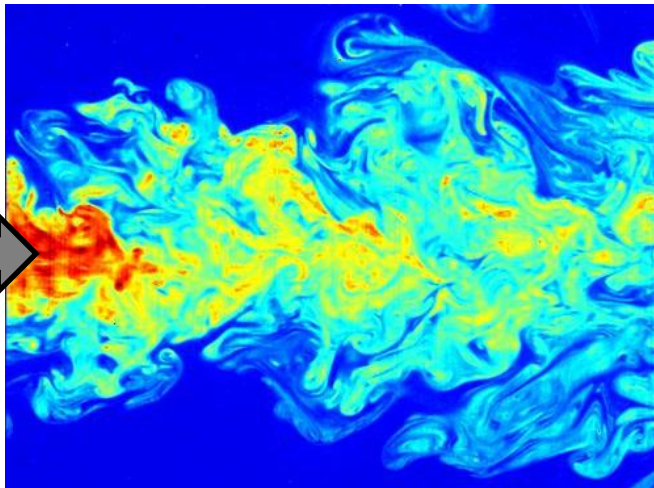
$$\frac{\partial(\rho \varepsilon)}{\partial t} + \text{div}(\rho \varepsilon U) = \text{div}\left[\frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \text{grad } \varepsilon\right] + C_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon}{k} 2\mu_t S_{ij} \cdot S_{ij} - C_{2\varepsilon} \rho \frac{\varepsilon^2}{k}$$
 (3.46)

※高Re数では渦粘性支配的、分子粘性を省略可

標準k-εモデル
Launder-Spalding(1974)

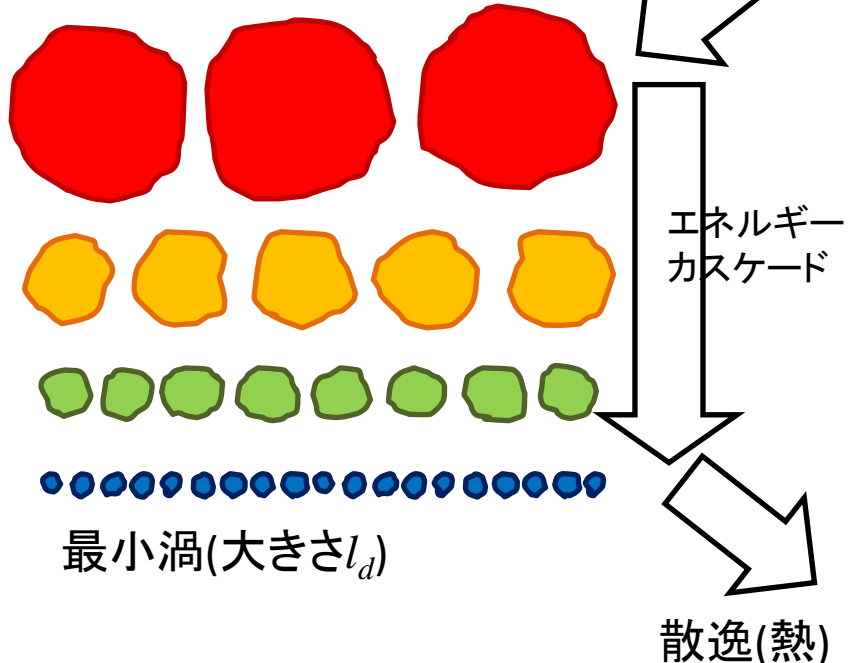
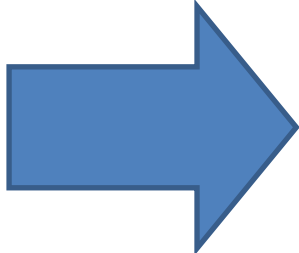
$$C_\mu = 0.09 \quad \sigma_k = 1.0 \quad \sigma_\varepsilon = 1.3 \quad C_{1\varepsilon} = 1.44 \quad C_{2\varepsilon} = 1.92$$
 (3.47)

消散率とは(補足)



乱流噴流 ※ 画像:wikipediaより

渦の大きさ順に並び変える



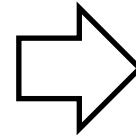
- 乱流は大小様々な渦により構成されている。
- **消散**とは乱流運動エネルギーが熱になる過程のことで、消散率とはその量。散逸ともいう。

$$\varepsilon = 2\mu(s'_{ij}s'_{ij}) > 0 \quad (3.43) \quad \dots\text{テキストp.78}$$

k-εモデルの弱点

- 低レイノルズ数流れの予測

壁近傍の遅い流れの部分の予測が困難。



いろいろな対策が
考えられてきた。

- 急速に変化する流れ

流れが急速に変化する領域では、乱流運動エネルギーの生成量と消散率が正しく予測できない。例) **よどみ点** → **角柱周り流れの角柱前縁部**とか

- 応力の等方性(の崩れが大きい流れ)

k-εモデルでは、乱れの等方性(どの方向の乱れも同じ量)を仮定しているため。

※どの方向の乱れも同じ量~レイノルズ応力の垂直成分はどの方向も同じ量

- (乱れの等方性の仮定が困難な)複雑な流れ

- 強い逆勾配圧力と再循環領域

いわゆる(乱流)剥離の予測が難しい。k-εモデルでは剥離を抑制してしまう。

- ほかの歪み

流線の曲率・・・例) **旋回を伴う管内流れ**、**曲率のある壁面の乱流境界層**
体積力・・・例) **コリオリ力** → **回転体内部の流れ**

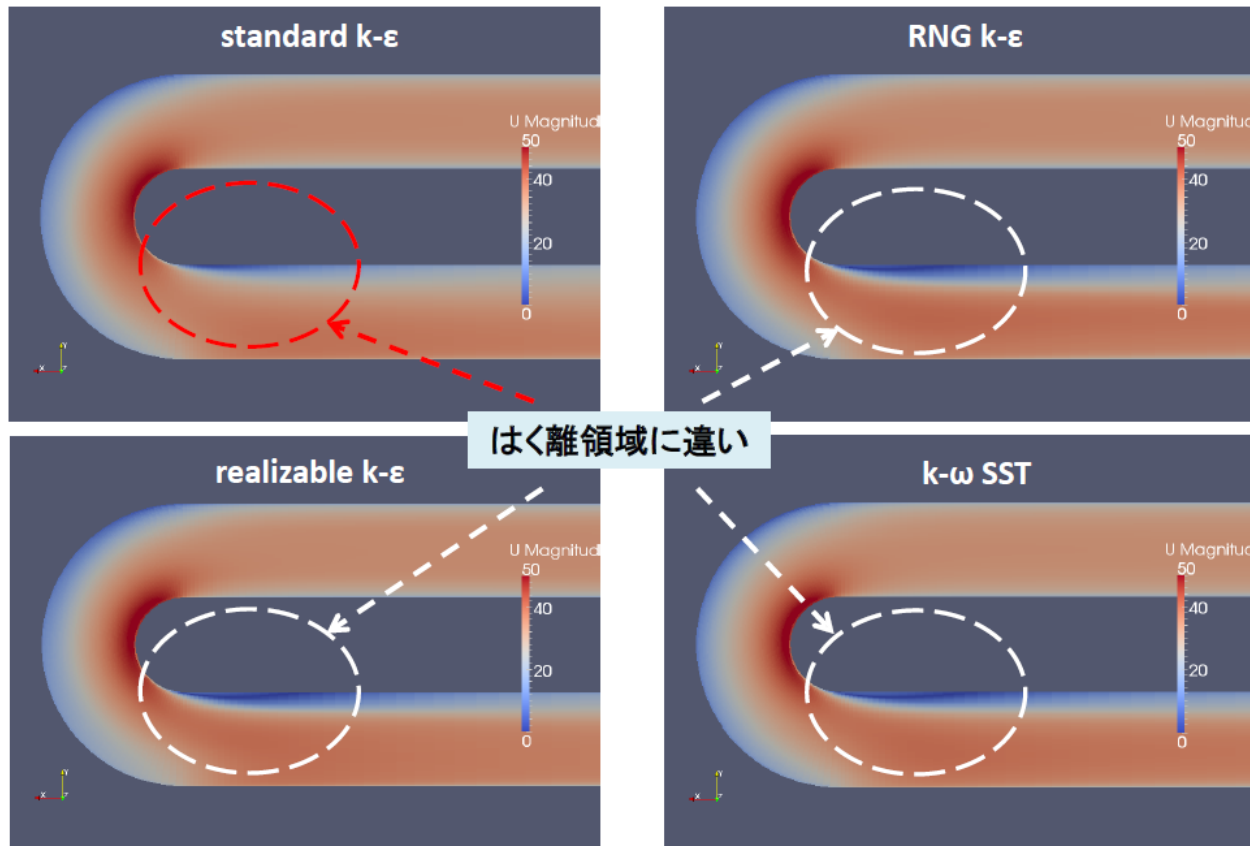
2次流れの予測も難しい

k-εモデルの弱点

k-εモデルでの剥離予測の悪さ

前回資料より

適用事例1 180° ベンド管



2013/02/22

「数値流体力学」輪講 第6回

二層k- ϵ モデル①

乱流境界層の壁面近傍
⇒ 局所的にレイノルズ数が低い場所



標準k- ϵ モデルでは予測が困難

- ・対策1 ⇒ 壁関数を使う
- ・対策2 ⇒ 低レイノルズ数型k- ϵ モデル:
粘性低層まで計算格子を切り、
k- ϵ モデルにダンピング関数や補正項を
追加し対応(前回資料参考)

・対策3 ⇒ 混合関数を使う

二層k-εモデル②

$$Re_y = y\sqrt{k}/\nu$$

- $Re_y \geq 200 \Rightarrow$ 標準k-εモデルで対応
- $Re_y < 200$ (壁面近く) \Rightarrow 以下のように対応
 - (1) 標準k-εモデルのk方程式だけ解く。
 - (2) 渦粘性係数 μ_t は次のように与えられる。

$$\mu_t = F_\mu \mu_{t,t} + (1 - F_\mu) \mu_{t,v}$$

- $F_\mu = F_\mu(Re_y)$ は $Re_y = 0$ で $F_\mu = 0$, $Re_y = 200$ で $F_\mu = 1$ となる関数

$$\left[\begin{array}{l} \mu_{t,t} = C_\mu \rho k^2 / \varepsilon, \quad \varepsilon = C_\mu^{3/4} k^{3/2} / l, \quad l = \kappa y \left[1 - \exp\left(-\frac{Re_y}{2\kappa C_\mu^{-3/4}}\right) \right] \\ \mu_{t,v} = C_\mu^{1/4} \rho \sqrt{k} l, \quad l = \kappa y \left[1 - \exp\left(-\frac{Re_y}{70}\right) \right] \end{array} \right]$$

剥離の予測に定評がある乱流モデル

- RNG k- ε モデル
- k- ω モデル → k- ω SSTモデル

RNG k-εモデル

Yakhot & Orszag (1986)

⇒ 繰り込み群(Re-Normalization Group)理論に基づく
2方程式モデルを導出

以下は、Yakhotら(1992)に基づくRNG k-εモデル

$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \text{div}(\rho k \mathbf{U}) = \text{div}(\alpha_k \mu_{eff} \text{grad} k) + 2\mu_t S_{ij} \cdot S_{ij} - \rho \varepsilon$$

$$\frac{\partial(\rho \varepsilon)}{\partial t} + \text{div}(\rho \varepsilon \mathbf{U}) = \text{div}(\alpha_\varepsilon \mu_{eff} \text{grad} \varepsilon) + C_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon}{k} 2\mu_t S_{ij} \cdot S_{ij} - C_{2\varepsilon} \rho \frac{\varepsilon^2}{k}$$

$$-\frac{\eta(1-\eta/\eta_0)}{1+\beta\eta^3} \frac{\varepsilon}{k} 2\mu_t S_{ij} \cdot S_{ij}$$

標準k-εモデルには
ない新たな項の導入

$$\mu_{eff} = \mu + \mu_t, \quad \mu_t = \rho C_\mu k^2 / \varepsilon,$$

$$C_\mu = 0.0845, \quad \alpha_k = \alpha_\varepsilon = 1.39, \quad C_{1\varepsilon} = 1.42, \quad C_{2\varepsilon} = 1.68$$

$$\eta = (k / \varepsilon) \sqrt{2S_{ij} \cdot S_{ij}}, \quad \eta_0 = 4.377, \quad \beta = 0.012$$

Wilcox k- ω モデル①

・k- ε モデル \Rightarrow 速度スケール: \sqrt{k} 長さスケール: $k^{3/2}/\varepsilon$

・k- ω モデル \Rightarrow 速度スケール: \sqrt{k} 長さスケール: \sqrt{k}/ω

$$\omega = \frac{\varepsilon}{k}$$

時間の逆数の次元をもった何か

$$\mu_t = \frac{\rho k}{\omega}$$

k- ε モデルとk- ω モデルは相互に導出可能な方程式

しかし結果は異なる

Wilcox k- ω モデル②

$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \text{div}(\rho k \mathbf{U}) = \text{div} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \text{grad} k \right] + 2\mu_t S_{ij} \cdot S_{ij} - \beta^* \rho k \omega$$
$$\frac{\partial(\rho \omega)}{\partial t} + \text{div}(\rho \omega \mathbf{U}) = \text{div} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\omega} \right) \text{grad} \omega \right] + \gamma_1 (2\rho S_{ij} \cdot S_{ij}) - \beta_1 \rho \omega^2$$
$$\sigma_k = 2.0, \quad \sigma_\omega = 2.0, \quad \gamma_1 = 0.553, \quad \beta_1 = 0.075, \quad \beta^* = 0.09$$

特徴: k- ε モデルに比べ、剥離現象の予測精度が良い

課題: 計算結果が仮定した自由流れ(境界層の外側の流れ)の ω の値に依存する \Rightarrow これでは使いづらい

Menter SST k- ω モデル①

壁面近傍 \Rightarrow k- ω モデル
 壁面から離れた領域 \Rightarrow k- ϵ モデル

$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \text{div}(\rho k \mathbf{U}) = \text{div} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \text{grad} k \right] + 2\mu_t S_{ij} \cdot S_{ij} - \beta^* \rho k \omega$$

乱流生成項 P_k

※ 上式のk方程式はWilcoxと同じ形

$$\frac{\partial(\rho \omega)}{\partial t} + \text{div}(\rho \omega \mathbf{U}) = \text{div} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_{\omega,1}} \right) \text{grad} \omega \right] + \gamma_2 (2\rho S_{ij} \cdot S_{ij}) - \beta_2 \rho \omega^2$$

$$+ 2 \frac{\rho}{\sigma_{\omega,2}} \omega \frac{\partial k}{\partial x_k} \frac{\partial \omega}{\partial x_k}$$

← Wilcox k- ω モデルには
ない新たな項、交差拡散項
の追加

$$\sigma_k = 1.0, \quad \sigma_{\omega,1} = 2.0, \quad \sigma_{\omega,2} = 1.17, \quad \gamma_2 = 0.44, \quad \beta_1 = 0.083, \quad \beta^* = 0.09$$

Menter SST k- ω モデル②

k- ω モデル計算領域とk- ϵ モデル計算領域の滑らかな接続



混合関数 C を取り入れる

$$C = F_C C_1 + (1 - F_C) C_2$$



k、 ω 方程式の各定数を混合関数形式で置き換える。

なお、 C_1 はk- ω モデルに対応する定数、
 C_2 はk- ϵ モデルに対応する定数である。

F_C は0から1までの関数で、 $F_C=0$ のときk- ϵ モデル、
 $F_C=1$ のときk- ω モデルに帰着する。

※ 詳細は省略

Menter SST k- ω モデル③

リミッターの導入

渦粘性係数・・・逆勾配圧力と後流領域のある流れの性能の改善のため。

乱流生成項・・・よどみ領域での乱れの生成を抑制するため。

渦粘性係数

$$\mu_t = \frac{a_1 \rho k}{\max(a_1 \omega, SF_2)}$$

$$a_1 = \text{const.}, \quad S = \sqrt{2S_{ij} \cdot S_{ij}}, \quad F_2 = \text{混合関数}$$

乱流生成項

$$P_k = \min(10\beta^* k\omega, \quad 2\mu_t S_{ij} \cdot S_{ij})$$

次回

日程	パート部分	ページ
2014.02	第3章：乱流とそのモデリング 担当セクション：3.7.3、3.7.4(一部)	p.85～104

次回引き続き、私が輪講を担当します。